
الأدهم
فى
الإستاتيكا
الصف الثالث الثانوى
عام وأزهر
٢٠١٩
هدية
مجانية
إعداد أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

الوحدة الأولى
الاحتكاك

① قوة الاحتكاك السكونى (ح)
هى قوة تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن وتكون فى عكس اتجاه الحركة

② قوة الاحتكاك السكونى النهائى (ح س)
هى القيمة العظمى لقوة الاحتكاك وتظهر عندما يكون الجسم على وشك الحركة ويكون

ح س = م س ر

(ح س: الاحتكاك النهائى السكونى ، م س: معامل الاحتكاك ، ر: رد الفعل العمودى)

③ ح ∈ [٠ ، ح س]

④ ح ∈ [٠ ، م س ر]

رد الفعل المحصل ر' = ر $\sqrt{1 + \text{م}_\text{س}^2}$

ر' = ر قا ل حيث ل زاوية الاحتكاك

⑤ زاوية الاحتكاك هى الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودى ورد الفعل المحصل

⑥ معامل الاحتكاك يتوقف على طبيعة الجسمين المتلامسين

ركز فى التقفيلة اللى جاية

Ⓐ إذا كانت الزاوية بين رد الفعل المحصل ورد الفعل العمودى هـ فإن م س = ظا هـ

Ⓑ إذا كانت الزاوية بين رد الفعل المحصل وقوة الاحتكاك النهائى هـ فإن م س = ظتا هـ

⑦ م س = ح س / ر = قوة الاحتكاك السكونى النهائى / رد الفعل العمودى

⑧ م س = ظا ل حيث ل زاوية الاحتكاك

⑨ م س (السكونى) > م ك (الحركى)

⑩ ح س > ح ك

فى مسائل المستوى المائل

Ⓐ إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان على وشك الانزلاق متأثر بوزنه فقط فإن قياس زاوية الاحتكاك (ل) = قياس زاوية ميل المستوى (هـ)

⟵ ل = هـ ، م س = ظا ل = ظا هـ

ب) إذا كان هـ = ل فإن الجسم يستقر على المستوى [احتكاك نهائي]

جـ) إذا كان هـ > ل فإن الجسم لا يمكن أن يتزن تحت تأثير وزنه فقط [يحدث انزلاق]

ركز في نقطة الاختيار دي

وضع جسم على مستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ وكانت ... زاوية الاحتكاك ل فإن الجسم يظل متزن إذا وفقط إذا كان ....

أ) هـ > ل   ب) هـ < ل

جـ) هـ ≤ ل   د) هـ = ل

التفسير

لأن هـ < ل مستقر

هـ = ل على وشك الانزلاق كذلك

لم ينزلق بعد [لسه مستقر]

∴ هـ ≤ ل

عند التأثير بقوة على جسم موضوع على مستوى خشن **مائل** فإن

$ق_1$ أقل قوة وصايش تجعله على وشك الحركة لأسفل

$ق_2$ أكبر قوة وصايش تجعله على وشك الحركة لأعلى

ق ∈ [$ق_1$ ، $ق_2$]



مسائل على الاحتكاك

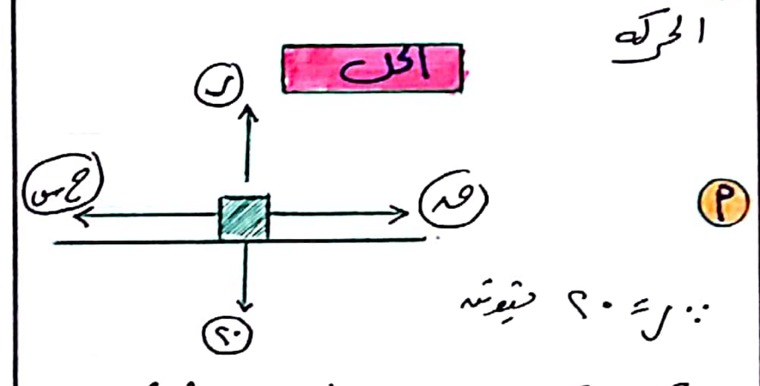
١) وضع جسم وزنه ٢٠ نيوتن على مستوى أفقي خشن فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني بينهما $\frac{1}{4}$ أوجد

أ) القوة الأفقية التي تجعل الجسم على وشك الحركة

ب) القوة التي تميل على المستوى ٣٠° وتجعله على وشك الحركة

الحل

أ)

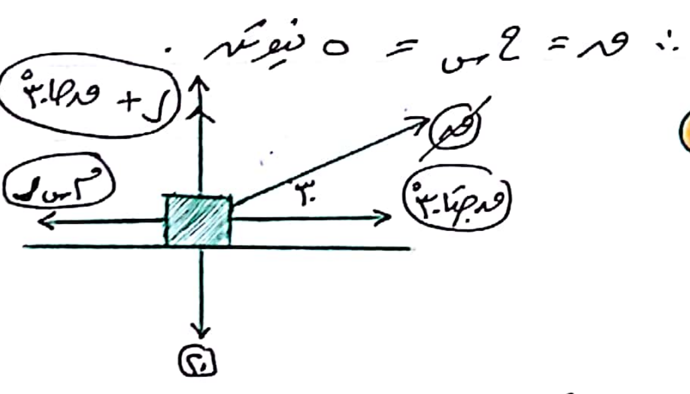


∵ ر = ٢٠ نيوتن

م س = $م_س$ ر = $\frac{1}{4}$ × ٢٠ = ٥ نيوتن

∴ ق = م س = ٥ نيوتن

ب)



ق جتا٣٠ = $م_س$ ر

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق = $\frac{1}{4}$ ر

∴ ر = $2\sqrt{3}$ ق ← (1)

∵ م : ر + ق جا ٣٠ = ٢٠

ر + $\frac{1}{2}$ ق = ٢٠ ← ②

من ① ، ②

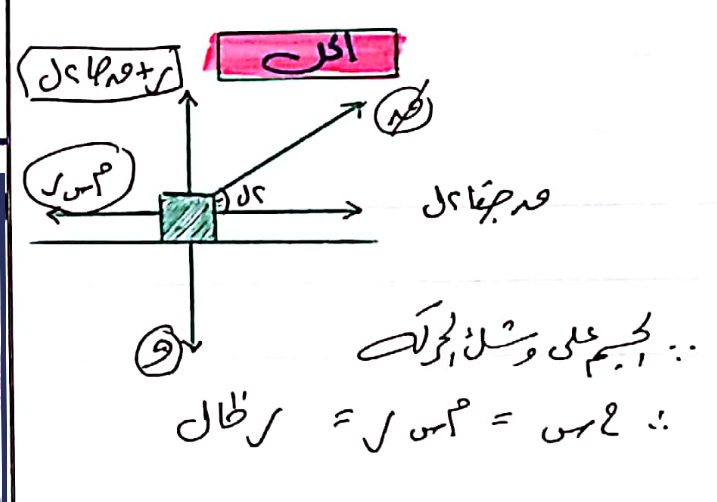
٢√٣ ق + $\frac{1}{2}$ ق = ٢٠

ق (٢√٣ + $\frac{1}{2}$) = ٢٠

∴ ق = ٥ نيوتن

② وضع جسم وزنه (و) ث.كجم على مستوى أفقى خشن قياس زاوية الاحتكاك «ل» شد الجسم بقوة تصنع مع الأفقى زاوية (٢ل) لأعلى جعلت الجسم على وشك الحركة . اثبت أن مقدار هذه القوة = و ظا ل

الحل



∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ح س = م س ر = ر ظا ل

ر + ق جا ٢ل = و

∴ ر = و − ق جا ٢ل ← ①

∵ م س ر = ق جتا ٢ل ← ②

ظا ل (و − ق جا ٢ل) = ق جتا ٢ل

و ظا ل − ظا ل × ق × ٢ جا ل جتا ل = ق جتا ٢ل

و ظا ل − $\frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$ × ق × ٢ جا ل جتا ل = ق جتا ٢ل

و ظا ل − ٢ جا² ل ق = ق جتا ٢ل

و ظا ل = ق جتا ٢ل + ٢ق جا² ل

و ظا ل = ق [جتا ٢ل + ٢ جا² ل]

و ظا ل = ق [١ − ٢ جا² ل + ٢ جا² ل]

∴ ق = و ظا ل

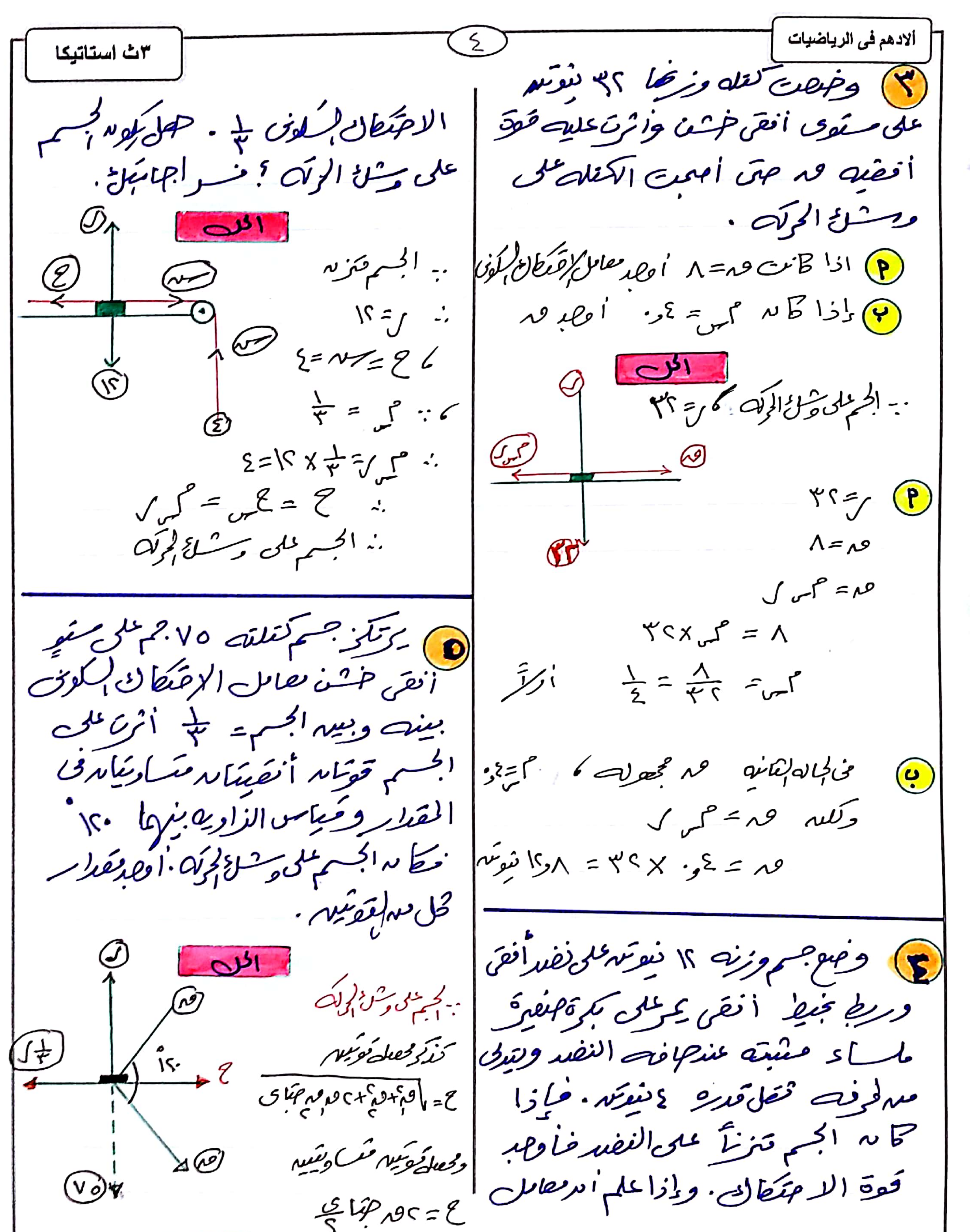
تذكر أن

جا ٢ل = ٢ جا ل جتا ل

جتا ٢ل = جتا² ل − جا² ل

= ٢ جتا² ل − ١

= ١ − ٢ جا² ل



(٣) وضعت كتلة وزنها ٣٢ نيوتن على مستوى أفقي خشن وأثرت عليه قوة أفقية ق حتى أصبحت الكتلة على وشك الحركة.

(أ) إذا كانت ق = ٨ أوجد معامل الاحتكاك السكوني

(ب) وإذا كان $م_س$ = ٠,٤ أوجد ق

الحل

∵ الجسم على وشك الحركة ، ر = ٣٢

(أ) ر = ٣٢

ق = ٨

ق = $م_س$ ر

٨ = $م_س$ × ٣٢

$م_س$ = ٨/٣٢ = ١/٤ أو ٠,٢٥

(ب) في الحالة الثانية ق مجهولة ، $م_س$ = ٠,٤

وكذلك ق = $م_س$ ر

ق = ٠,٤ × ٣٢ = ١٢,٨ نيوتن

(٤) وضع جسم وزنه ١٢ نيوتن على نضد أفقي وربط بخيط أفقي يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة عند حافة النضد ويتدلى من الطرف الآخر ثقل قدره ٤ نيوتن. فإذا كان الجسم متزناً على النضد فأوجد قوة الاحتكاك. وإذا علم أن معامل الاحتكاك السكوني ١/٣ . هل يكون الجسم على وشك الحركة؟ فسر اجابتك.

الحل

∵ الجسم متزن

∴ ر = ١٢

، ح = ش = ٤

، ∵ $م_س$ = ١/٣

∴ $م_س$ ر = ١/٣ × ١٢ = ٤

∵ ح = $م_س$ ر = ٤

∴ الجسم على وشك الحركة

(٥) يرتكز جسم كتلته ٧٥ جم على مستوٍ أفقي خشن معامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم = ١/٣ أثرت على الجسم قوتان أفقيتان متساويتان في المقدار وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فكان الجسم على وشك الحركة. أوجد مقدار كل من القوتين.

الحل

∵ الجسم على وشك الحركة

تذكر محصلة قوتين

ح = $\sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + ٢ ق_1 ق_2 \text{ جتا } ي}$

ومحصلة قوتين متساويتين

ح = ٢ق جتا $\frac{ي}{٢}$

ح = ٢ق × جتا $\frac{١٢٠}{٢}$

∴ ح = ق

∴ $ع = م_س ر$

$ق = \frac{1}{3} ر$ ⟵ (١)

، ∴ $ر = ٧٥$

∴ $ق = \frac{1}{3} \times ٧٥ = ٢٥$ ث.جم

∴ مقدار كل من القوتين = ٢٥ ث.جم

---

(٦) فى الشكل المقابل

مقدار أقل قوة أفقية لازمة لاتزان جسم كتلته ١٥ كجم على حائط رأسى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينهما $\frac{1}{5}$ هو ...... ث.كجم

الحل

الجسم يتزن إذا منع من الانزلاق لاسفل لو محتاج أقل قوة يعنى تجعله على وشك الحركة لاسفل ويكون الاحتكاك لاعلى

$م_س ر = و$

$\frac{1}{5} ر = ١٥$

∴ $ر = ٧٥$ ث.كجم

، $ق = ر$ ∴ $ق = ٧٥$ ث.كجم

---

(٧) إذا كان الوزن ٦ نيوتن

$م_س = \frac{1}{3}$

فإن قوة الاحتكاك السكونى ∋ ...... أفقى

(أ)]٠، ٢[(ب) [٠، ٢] (ج) [٠، ٢[(د)]٠، ٢]

$ر = ٦$ $م_س ر = \frac{1}{3} \times ٦ = ٢$

ع ∋ [٠، $م_س ر$] ∋ [٠، ٢]

ثانياً: مسائل المستوى المائل

(١) وضع جسم وزنه ٣٠ نيوتن على مستوى مائل خشن ولوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان زاوية ميل المستوى ٣٠° فإذا أريد زيادة ميل المستوى إلى ٦٠° فأوجد مقدار

(أ) أقل قوة تمنع الجسم من الانزلاق وتؤثر باتجاه المستوى

(ب) أكبر قوة موازية لخط أكبر ميل وتمنعه من الانزلاق

الحل

∵ الجسم كان على وشك الانزلاق عندما

هـ = ٣٠° ∴ م س = ظا ٣٠° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(أ)

لاحظ لأنها أقل قوة فهي التي تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل ويكون الاحتكاك لأعلى

ر = ٣٠ جتا ٦٠°

∴ ر = ١٥ نيوتن ← (١)

ق + م س ر = ٣٠ جا ٦٠ ← (٢)

ق + $\frac{1}{\sqrt{3}}$ × ١٥ = ١٥$\sqrt{3}$

ق = ١٥$\sqrt{3}$ − $\frac{15}{\sqrt{3}}$ = ١٠$\sqrt{3}$ نيوتن

(ب) لإيجاد أكبر قوة

ر = ٣٠ جتا ٦٠°

∴ ر = ١٥ نيوتن ← (١)

ق = م س ر + ٣٠ جا ٦٠°

ق = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ × ١٥ + ١٥$\sqrt{3}$

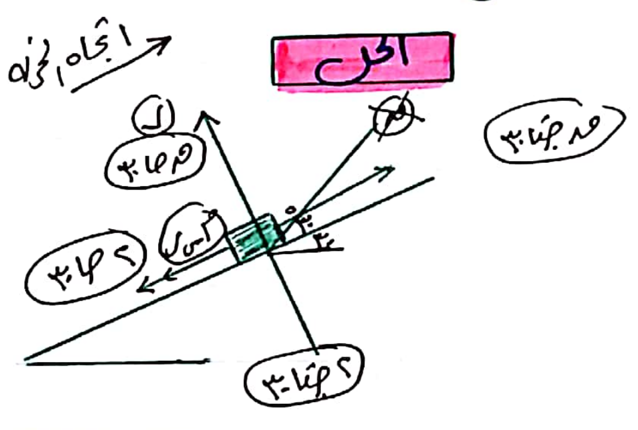
∴ ق = ٢٠$\sqrt{3}$ نيوتن

(٢) وضع جسم وزنه ٢ ث.كجم على مستوٍ أفقي خشن ثم أميل المستوى تدريجياً حتى أصبح الجسم على وشك الانزلاق أسفل المستوى عندما كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقي ٣٠° أوجد معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى وإذا ربط الجسم بخيط ثم شد الخيط في اتجاه يميل بزاوية ٦٠° على الأفقي حتى أصبح الجسم على وشك الحركة لأعلى

أوجد (أ) مقدار قوة الشد

(ب) مقدار قوة الاحتكاك

الحل



* م س = ظا ٣٠ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

لاحظ أن القوة تميل على الأفقي بـ ٦٠°

لذلك فهي تميل على المستوى لأعلى ٣٠°

لأن المستوى مائل على الأفقي ٣٠° مفهوم؟

∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى ∴ الاحتكاك لأسفل

ق جتا ٣٠° = $م_س$ ر + ٢ جا ٣٠°

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ر + ١ ← (١)

∵ ر + ق جا ٣٠° = ٢ جتا ٣٠°

ر + $\frac{1}{2}$ ق = $\sqrt{3}$

∴ ر = $\sqrt{3}$ − $\frac{1}{2}$ ق ← (٢)

من (٢) فى (١)

∴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ($\sqrt{3}$ − $\frac{1}{2}$ ق) + ١

بالضرب × $\sqrt{3}$

$\frac{3}{2}$ ق = $\sqrt{3}$ − $\frac{1}{2}$ ق + $\sqrt{3}$

$\frac{3}{2}$ ق + $\frac{1}{2}$ ق = ٢ $\sqrt{3}$

٢ ق = ٢ $\sqrt{3}$

∴ ق = $\sqrt{3}$ ث.كجم

فى (٢) ←

∴ ر = $\sqrt{3}$ − $\frac{1}{2}$ $\sqrt{3}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ث.كجم

∴ قوة الاحتكاك السكونى

$ع_س$ = $م_س$ ر = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{1}{2}$ ث.كجم

③

جسم وزنه ٣٨ ث.كجم يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه إذا وضع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{1}{4}$ فإذا وضع هذا الجسم على مستوى أفقى فى نفس خشونة المستوى المائل وأثرت فيه قوة شد إلى أعلى تصنع مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{3}{4}$ وتقع فى مستوى رأسى يجعله على وشك الحركة أوجد مقدار هذه القوة ورد الفعل العمودى

الحل

ر + ق جا هـ

ق

$م_س$ ر

ق جتا هـ

هـ

٣٨

هنا أخذ من المستوى المائل ان الجسم على وشك الحركة تحت تأثير وزنه فقط ∴ $م_س$ = ظا هـ = $\frac{1}{4}$

ونكمل المستوى الأفقى

∵ الجسم على وشك الحركة

٥ ، ٣ ، ٤ ، هـ

جا هـ = $\frac{3}{5}$

جتا هـ = $\frac{4}{5}$

∴ ق جتا هـ = $م_س$ ر

$\frac{4}{5}$ ق = $\frac{1}{4}$ ر

ر = $\frac{16}{5}$ ق ← (١)

∵ ر + ق جا هـ = ٣٨

$\frac{16}{5}$ ق + $\frac{3}{5}$ ق = ٣٨

$\frac{19}{5}$ ق = ٣٨

∴ ق = $\frac{38 \times 5}{19}$ = ١٠ ث.كجم

∴ ر = ٣٢ ث.كجم

④ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية جيبها $\frac{5}{13}$ شد الجسم بقوة أفقية مقدارها ٢٢ نيوتن واقعة في المستوى الرأسي المار بخط أكبر ميل للمستوى جعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى، فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى هو $\frac{1}{2}$، فأوجد مقدار وزن الجسم (و).

الحل

(شكل: وشك الحركة ، ر ، ٢٢ جتاهـ ، و جاهـ ، م س ر ، ٢٢ ، ٢٢ جاهـ ، و جتاهـ ، هـ)

(مثلث: ١٣ ، ٥ ، ١٢ ، هـ)

$جاهـ = \frac{5}{13}$

$جتاهـ = \frac{12}{13}$

$ظاهـ = \frac{5}{12}$

$م_س = \frac{1}{2}$

∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى ∴ الاحتكاك لأسفل

∴ $ر = ٢٢ جاهـ + و جتاهـ$

∴ $ر = ٢٢ \times \frac{5}{13} + و \times \frac{12}{13}$ ← ①

، $٢٢ جتاهـ = م_س ر + و جاهـ$ ← ②

بالتعويض من ① عن قيمة ر

$٢٢ \times \frac{12}{13} = \frac{1}{2}\left(٢٢ \times \frac{5}{13} + \frac{12}{13} و\right) + \frac{5}{13} و$

(بالضرب × ١٣)

$٢٢ \times ١٢ = \frac{1}{2}(٢٢ \times ٥ + ١٢ و) + ٥ و$

$٢٦٤ = ٥٥ + ٦ و + ٥ و$

$٢٦٤ - ٥٥ = ١١ و$

∴ $و = \frac{209}{11} = ١٩$ نيوتن.

⑤ في الشكل ده إذا كان الجسم على وشك الانزلاق إلى أسفل المستوى

(شكل: ١٠ ، ٦)

فإن معامل الاحتكاك السكوني = ...

(أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{4}{5}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{4}{3}$

∵ الجسم على وشك الحركة تحت تأثير وزنه فقط

∴ $م_س = ظاهـ = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

(مثلث: ١٠ ، ٦ ، ٨ ، هـ)

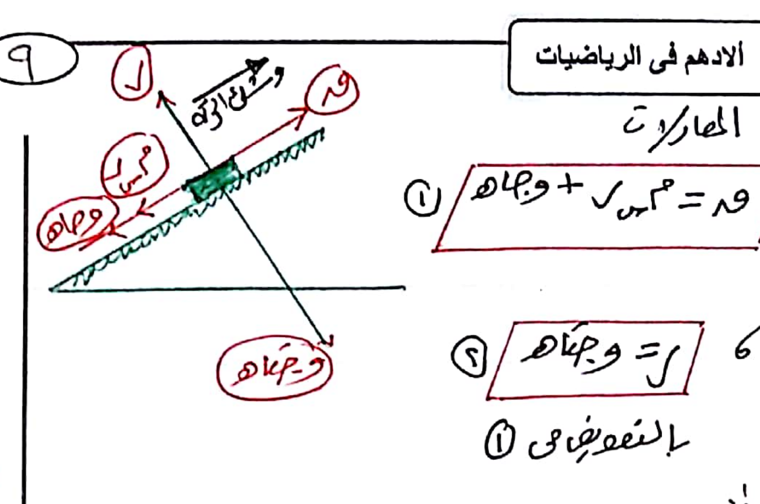
⑥ وضع جسم مقدار وزنه و على مستوٍ خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ فوجد أنه على وشك الانزلاق. أثبت أن القوة التي توازي خط أكبر ميل للمستوى وتجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى = ٢ و جاهـ

وأثبت أيضاً أن $ر' = و$ ($ر'$ = رد الفعل المحصل)

الحل

$م_س = ظاهـ = \frac{جاهـ}{جتاهـ}$

، ∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى



المعادلات

ق = م س ر + و جا هـ (1)

، ر = و جتا هـ (2)

بالتعويض في (1)

∴ ق = (جا هـ / جتا هـ) × و جتا هـ + و جا هـ

∴ ق = ٢ و جا هـ # أولاً

∵ ح = ر قا ل = ر قا هـ

= و جتا هـ × (١ / جتا هـ) = و # ثانياً

---

(٧) كتلتان ٣، ٥ كجم متصلان بخيط خفيف وموضوعتان على مستوى مائل خشن وكان معامل الاحتكاك السكوني بين المستوى والجسمين ٢/٣ ، ٤/٥ على الترتيب بين أى الجسمين يوضع أسفل الجسم الآخر حتى يتحرك الجسمان معاً . ثم اثبت أن ظل زاوية ميل المستوى على الأفقي عندما يكون الجسمان على وشك الحركة ٣/٤

الحل

الجسم ذو معامل احتكاك اصغر يوضع أسفل (لابد حركته لأسفل)
والجسم ذو معامل احتكاك أكبر يوضع أعلى
حتى يتحرك الجسمان معاً والخيط مشدود

وشك الحركة
٣ جا هـ — ٣ جتا هـ — ر١ — م١ر١ — ش — هـ
٥ جا هـ — ٥ جتا هـ — ر٢ — م٢ر٢ — ش

م١ = ٢/٣

م٢ = ٤/٥

لاحظ الجسمان هنا على وشك الحركة لأسفل
لابد منفيش قوة شد تسحبهم لأعلى يبقى هينزلوا لأسفل
ويكون الاحتكاك لأعلى [عكس الحركة]

* بالنسبة للجسم ٣ ث.كجم الأول

ر١ = ٣ جتا هـ

ش + ٢/٣ ر١ = ٣ جا هـ

ش = ٣ جا هـ − ٢/٣ × ٣ جتا هـ

ش = ٣ جا هـ − ٢ جتا هـ ← (1)

* بالنسبة للجسم ٥ ث.كجم الثاني

ر٢ = ٥ جتا هـ

ش + ٥ جا هـ = ٤/٥ ر٢

ش = ٤/٥ × ٥ جتا هـ − ٥ جا هـ

ش = ٤ جتا هـ − ٥ جا هـ ← (2)

من (1) ، (2) ش = ش

∴ ٣ جا هـ − ٢ جتا هـ = ٤ جتا هـ − ٥ جا هـ

٣ جا هـ + ٥ جا هـ = ٤ جتا هـ + ٢ جتا هـ

٨ جا هـ = ٦ جتا هـ

جا هـ / جتا هـ = ٦/٨ ∴ ظا هـ = ٣/٤ #

(٨) برهن أن: إذا وضع الجسم على مستوى مائل خشن وكان الجسم على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك = قياس زاوية ميل المستوى على الأفق.

الحل

∵ الجسم على وشك الحركة لأسفل

∴ الاحتكاك لأعلى

∴ $ر = و \, جتا \, هـ$ ← (١)

$م_س \, ر = و \, جا \, هـ$ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

$م_س \times و \, جتا \, هـ = و \, جا \, هـ$

$م_س = \frac{جا \, هـ}{جتا \, هـ} = ظا \, هـ$

ولكن $م_س = ظا \, ل$ حيث ل زاوية الاحتكاك

∴ $ظا \, هـ = ظا \, ل$

∴ زاوية ميل المستوى = زاوية الاحتكاك #

(٩) وضع جسم وزنه $66\frac{2}{3}$ نيوتن على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك بينهما $= \frac{3}{4}$ أثرت على الجسم قوة مقدارها ٤٠ نيوتن وتميل على الأفقى بزاوية حادة قياسها θ فإذا كان الجسم على وشك الحركة فما قيمة θ

الحل

معادلتا الاتزان:

$40 \, جتا \, \theta = \frac{3}{4} ر$ ← (١)

$ر + 40 \, جا \, \theta = 66\frac{2}{3}$

$40 \, جا \, \theta = \frac{200}{3} - ر$ ← (٢)

بتربيع (١)، (٢) والجمع

$(40 \, جتا \, \theta)^2 + (40 \, جا \, \theta)^2 = (\frac{3}{4} ر)^2 + (\frac{200}{3} - ر)^2$

∴ $1600 (جتا^2 \theta + جا^2 \theta) = \frac{9}{16} ر^2 + \frac{40000}{9} - \frac{400}{3} ر + ر^2$

$\frac{25}{16} ر^2 - \frac{400}{3} ر + \frac{40000}{9} - 1600 = 0$

$\frac{25}{16} ر^2 - \frac{400}{3} ر + \frac{25600}{9} = 0$

بحل المعادلة بالآلة طبعاً

∴ $ر = \frac{128}{3}$

وبالتعويض فى (١) ∴ $جتا \, \theta = \frac{3}{4} ر \div 40$

∴ $جتا \, \theta = \frac{3}{160} \times \frac{128}{3}$

∴ $\theta \simeq 36° \, 52'$

(١٠) وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ فإذا كان أقل وأكبر قوة موازية لخط أكبر ميل وتجعل الجسم متزناً على المستوى هما ١٠، ٤٠ نيوتن على الترتيب أوجد $م_س$، θ

الحل

أولاً: أقل قوة هى التى تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل

$ر = 50 \, جتا \, \theta$

$ق + م_س \, ر = 50 \, جا \, \theta$

$10 + م_س \times 50 \, جتا \, \theta = 50 \, جا \, \theta$

∴ $م_س = \frac{٥٠ جا θ - ١٠}{٥٠ جتا θ}$ ← (١)

اتجاه الحركة ، ر ، ق ، م ر ، ٥٠ جا θ ، ٥٠ جتا θ

ثانياً: أكبر قوة هي التي تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى

ر = ٥٠ جتا θ

، ق = $م_س$ ر + ٥٠ جا θ

٤٠ = $م_س$ × ٥٠ جتا θ + ٥٠ جا θ

$م_س = \frac{٤٠ - ٥٠ جا θ}{٥٠ جتا θ}$ ← (٢)

بمساواة (١) ، (٢)

∵ المقام = المقام ∴ البسط = البسط

٥٠ جا θ − ١٠ = ٤٠ − ٥٠ جا θ

٥٠ جا θ + ٥٠ جا θ = ٤٠ + ١٠

١٠٠ جا θ = ٥٠

∴ جا θ = $\frac{١}{٢}$

∴ θ = ٣٠°

∴ $م_س = \frac{٤٠ - ٥٠ جا ٣٠}{٥٠ جتا ٣٠} = \frac{\sqrt{٣}}{٥}$

---

(١١) وضع جسم وزنه ١٦ ث.كجم على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين الجسم = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ اثرت على الجسم قوة تعمل في خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى مقدارها ١٠ ث.كجم فإذا كان الجسم متزناً عين قوة الاحتكاك وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا ؟

الحل

اتجاه الحركة ، ر ، ١٠ ، ع ، ١٦ جا ٣٠ ، ١٦ جتا ٣٠°

لتحديد اتجاه قوة الاحتكاك نقارن بين ١٠ ، ١٦ جا ٣٠

∵ ١٠ > ١٦ جا ٣٠ ∴ الحركة لأعلى

∴ قوة الاحتكاك لأسفل

، ∵ الجسم متزن

∴ ١٠ = ع + ١٦ جا ٣٠

١٠ = ع + ٨

∴ ع = ٢ ث.كجم

لتحديد إذا كان على وشك الحركة أم لا

$م_س = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ر = ٨$\sqrt{٣}$

∴ $م_س$ ر = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × ٨$\sqrt{٣}$ = ٨ ث.كجم

∴ ع < $م_س$ ر

∴ الجسم لا يكون على وشك الحركة

ولو مش مصدقني اسأله



١) إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ تؤثر في نقطة ء
فإن عزمها حول و $\overrightarrow{ج_و} = \overrightarrow{وء} \times \overrightarrow{ق}$
حول ب $\overrightarrow{ج_ب} = \overrightarrow{بء} \times \overrightarrow{ق}$
$\overrightarrow{ج_ه} = \overrightarrow{هء} \times \overrightarrow{ق}$

٢) $\overrightarrow{ج}$ = (نقطة التأثير - مركز العزم) × $\overrightarrow{ق}$

٣) $\overrightarrow{ج_و} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}$ = (ر ق جا هـ) $\overrightarrow{ى}$

٤) وحدة العزم = قوة × مسافة

٥) لإيجاد طول العمود الساقط = $\frac{\|\overrightarrow{ج_و}\|}{\|\overrightarrow{ق}\|}$

٦) ج = ق ل مقدار

٧) الإشارة مع عقارب الساعة −
عكس عقارب الساعة +

ء) $\overrightarrow{ج_و}$ متجه العزم

ب) $ج_و$ القياس الجبري [+ أو −]

ج) $\|\overrightarrow{ج_و}\|$ هو كمية موجبة دائماً [معيار متجه العزم]

---

٨) عزم قوة حول نقطة في الفراغ.

$$\overrightarrow{ج_و} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ س & ص & ع \\ ق_س & ق_ص & ق_ع \end{vmatrix}$$

(ص $ق_ع$ − ع $ق_ص$) $\overrightarrow{س}$ مركبة العزم في اتجاه $\overrightarrow{س}$

+ (ع $ق_س$ − س $ق_ع$) $\overrightarrow{ص}$ مركبة العزم $\overrightarrow{ص}$

+ (س $ق_ص$ − ص $ق_س$) $\overrightarrow{ع}$ 〃 $\overrightarrow{ع}$

٩) ينعدم عزم قوة حول محور إذا
ء) اشترك خط عمل القوة مع المحور في نقطة على الأقل
ب) إذا كانت القوة توازي المحور

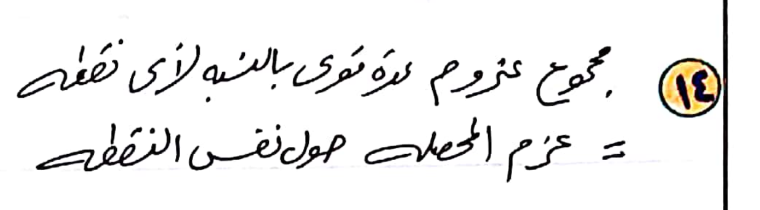
١٠) عزم قوة بالنسبة لأي نقطة على خط عملها = ٠

١١) إذا كان $\overrightarrow{ج_ء} = \overrightarrow{ج_ب}$ فإن خط عمل $\overrightarrow{ق}$ // $\overleftrightarrow{ءب}$

١٢) إذا كان $\overrightarrow{ج_ء} = -\overrightarrow{ج_ب}$ فإن خط عمل $\overrightarrow{ق}$ ينصف $\overline{ءب}$

١٣) متجه الوحدة في اتجاه ء ⇐ $\overrightarrow{ء}^* = \frac{\overrightarrow{ء}}{\|\overrightarrow{ء}\|}$

ومنها $\overrightarrow{ء}$ = متجه وحدة × معياره



(١٤) مجموع عزوم عدة قوى بالنسبة لأى نقطة = عزم المحصلة حول نفس النقطة

---

(١٥) ينعدم مجموع عزوم القوى حول نقطة إذا

(أ) المجموعة متزنة

(ب) هذه النقطة تقع على خط عمل القوة المحصلة.

لاحظ فى مسائل الرسومات

(١٦) العزم = القوة × الذراع العمودى

---

(١٧) إذا لم تستطيع ايجاد بعد عمودى حلل القوة فى اتجاهين متعامدين وتضرب كل مركبة فى البعد العمودى عليها وتستخدم قاعدة الإشارات

ملاحظات للأشكال الهندسية

(١) الوتر = طول الضلع $\sqrt{2}$ فى المثلث القائم المتساوى الساقين

(٢) المثلث القائم الثلاثينى الستينى

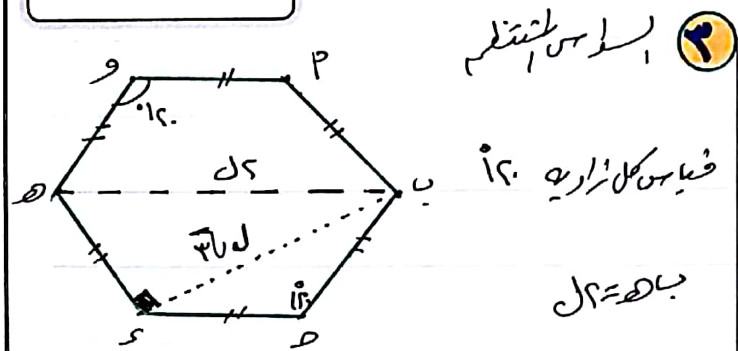
١ : $\sqrt{3}$: ٢

الوتر ←

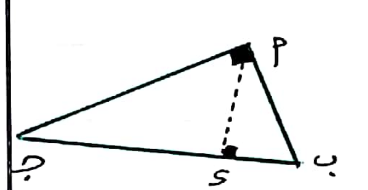
(٣) السداسى المنتظم

قياس كل زاوية ١٢٠°

ب هـ = ٢ل



(٤) أ د = $\frac{أب \times أجـ}{ب جـ}$





(١) إذا كانت $\vec{ق} = \vec{س} - ٢\vec{ص}$ تؤثر فى أ (٢، ٣) . أوجد

(أ) عزم $\vec{ق}$ بالنسبة للنقطة ب (٢، ١) .

(ب) طول العمود الساقط من ب على خط عمل القوة.

الحل

(أ) $\vec{جـ}_ب = \vec{ب أ} \times \vec{ق}$

$= (\vec{أ} - \vec{ب}) \times \vec{ق}$

$= [(٢، ٣) - (٢، ١)] \times (١، -٢)$

$= (٠، ٢) \times (١، -٢)$

$= ٠ - ٢ = -٢ \vec{ع}$

(ب) ل $= \frac{\|\vec{جـ}\|}{\|\vec{ق}\|} = \frac{٢}{\sqrt{١+٤}} = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$

وحدة طول

(٢) مؤثر القوة ق في النقطة أ(-٣، ٢) فإذا كان عزم ق حول كل من النقطتين ب(٣، ١)، جـ(-١، ٤) يساوي ٢٨ ع أوجد ق

الحل

∵ ج_ب = ج_جـ = ٢٨ ع

ب أ × ق = جـ أ × ق = ٢٨ ع

أ - ب = (-٦، ١)

أ - جـ = (-٢، -٢)

نفرض أن ق = (س، ص)

ج_ب = (-٦، ١) × (س، ص)

∴ -٦ص - س = ٢٨ ← (١)

ج_جـ = (-٢، -٢) × (س، ص)

-٢ص + ٢س = ٢٨ ← (٢)

-١٢ص - ٢س = ٥٦

-١٤ص = ٨٤

∴ ص = -٦

٣٦ - س = ٢٨

س = ٣٦ - ٢٨

∴ س = ٨

∴ ق = (٨، -٦)

(٣) مؤثر القوى ق١ = س + ٢ص ، ق٢ = ٣س - ص في أ(-٢، ٣) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة ينصف بجـ حيث ب(-١، ٥) ، جـ(١، ٢)

الحل

مجموع العزوم حول منتصف بجـ مفروض يكون صفر.

م = ((-١+١)/٢ ، (٥+٢)/٢) = (٠، ٣٫٥)

ج_م = م أ × ق

= [(-٢، ٣) - (٠، ٣٫٥)] × (٤، ١)

= (-٢، -٠٫٥) × (٤، ١)

= -٢ + ٠٫٥ × ٤ = ٠

∴ خط عمل المحصلة ينصف بجـ

وفيه طريقة ثانية للحل

ج_ب = ...

ج_جـ = ...

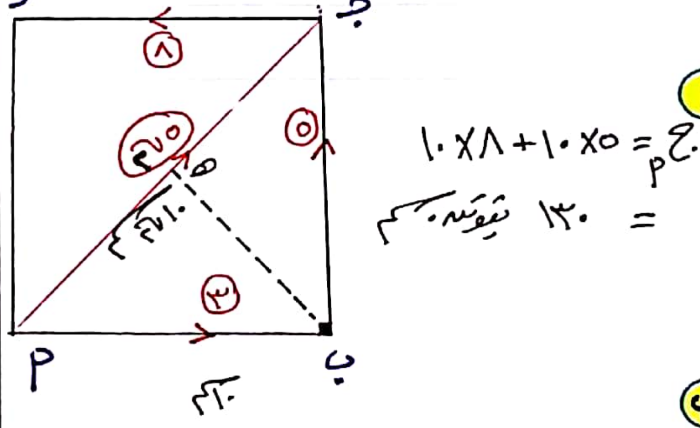
متجهين متساويين في المقدار ومختلفين في الإشارة.

∴ خط عمل ق ينصف بجـ

حاول تحلها

(٤) أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٠ سم
اثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٥ ، ٨ ، ٥$\sqrt{٢}$ ث.جم
تؤثر في اتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$ ، $\overrightarrow{جـد}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ على الترتيب .
أوجد مجموع عزوم القوى :
(أ) بالنسبة لنقطة أ
(ب) بالنسبة لنقطة ب
(جـ) بالنسبة لمركز المربع

الحل



(أ) $جـ_{أ} = ٥ × ١٠ + ٨ × ١٠$
$= ١٣٠$ ث.جم.سم

(ب) $جـ_{ب} =$
لاحظ أن ب هـ = $\frac{١٠ × ١٠}{١٠\sqrt{٢}} = ٥\sqrt{٢}$ سم
ومن خواص المربع هو نصف قطر = $\frac{١٠\sqrt{٢}}{٢} = ٥\sqrt{٢}$

$جـ_{ب} = -٥\sqrt{٢} × ٥\sqrt{٢} + ٨ × ١٠$
$= -٥٠ + ٨٠ = ٣٠$ ث.جم.سم

(جـ) بالنسبة لمركز المربع كل قوة تبعد عنه نصف ضلع
$= ٥$ سم

$جـ_{هـ} = ٣ × ٥ + ٥ × ٥ + ٨ × ٥$
$= ٨٠$ ث.جم.سم

لاحظ أننا نتلاشى القوة التي تمر بالنقطة التي نريد حولها العزم . ونستخدم قاعدة الإشارات وفي حالة رسم مربع بترتيب مختلف ستختلف الإشارات . فالعبرة بالمرسوم

---

(٥) أ ب جـ د مستطيل فيه أب = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، القوى ١٦ ، ١٤ ، ق ، ك ث.جم تؤثر في $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{جـب}$ ، $\overrightarrow{جـد}$ ، $\overrightarrow{أد}$ على الترتيب . فإذا كان المجموع الجبري لعزوم هذه القوى حول كل من جـ ، مركز المستطيل = صفر
أوجد ق ، ك

الحل

∵ $جـ_{جـ} =$ صفر
∴ $١٦ × ١٢ - ك × ٨ = ٠$
$١٩٢ = ٨ ك$
∴ ك = ٢٤ ث.جم

، ∵ $جـ_{م} =$ صفر
$١٦ × ٦ - ١٤ × ٤ + ق × ٦ - ك × ٤ = ٠$
$٩٦ - ٥٦ + ٦ق - ٩٦ = ٠$
∴ $٦ق = ٥٦$
∴ ق = $\frac{٢٨}{٣} = ٩\frac{١}{٣}$ ث.جم

⑥ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب
فيه أب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم
اثرت قوة ق في مستوى المثلث
بحيث كان جـ أ = جـ ب = ٦٠ نيوتن . سم
، جـ د = - ٦٠ نيوتن . سم أوجد
مقدار ق وعين خط عملها .

الحل

∵ جـ أ = جـ ب
∴ خط عمل ق // أب
، ∵ جـ ب = - جـ د
∴ خط عمل ق ينصف ب جـ

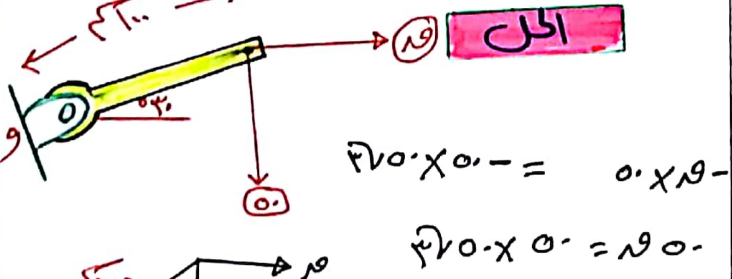
∵ جـ ب = ق × ٤ = ٦٠
∴ ٤ ق = ٦٠ ∴ ق = ١٥ نيوتن
وخط عملها // أب وينصف ب جـ
اى فى اتجاه هـ د
لاحظ ان هذا الاتجاه يجعل العزوم حول
أ ، ب موجبه وحول جـ سالبه
وهو ده المطلوب

⑦ أكمل
أ) إذا كان عزم قوة حول نقطة ثابتاً
فإن مقدار القوة يتناسب عكسياً مع ....
ذراع العزم
ق × ل = ثابت
$ق \propto \frac{1}{ل}$

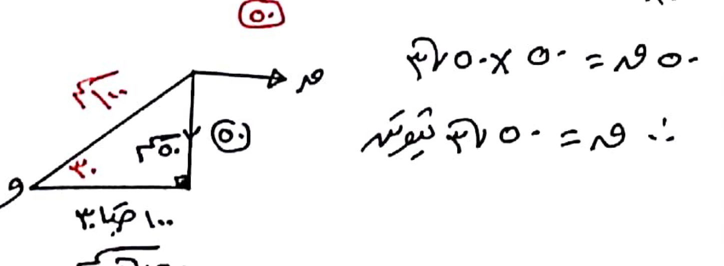
ب) قوة مقدارها ٥٠ نيوتن ويبعد خط عملها
من نقطة أ مسافة ٨ سم فإن معيار
عزمها حول أ = ... نيوتن . سم
معيار العزم = ق × ل = ٥٠ × ٨ = ٤٠٠ نيوتن . سم
أو = ٤ نيوتن . م لاحظ الوحدات

⑧ إذا كان عزم القوة ق حول نقطة و
= عزم القوة ٥٠ نيوتن حول نقطة و
فما مقدار ق ؟

الحل



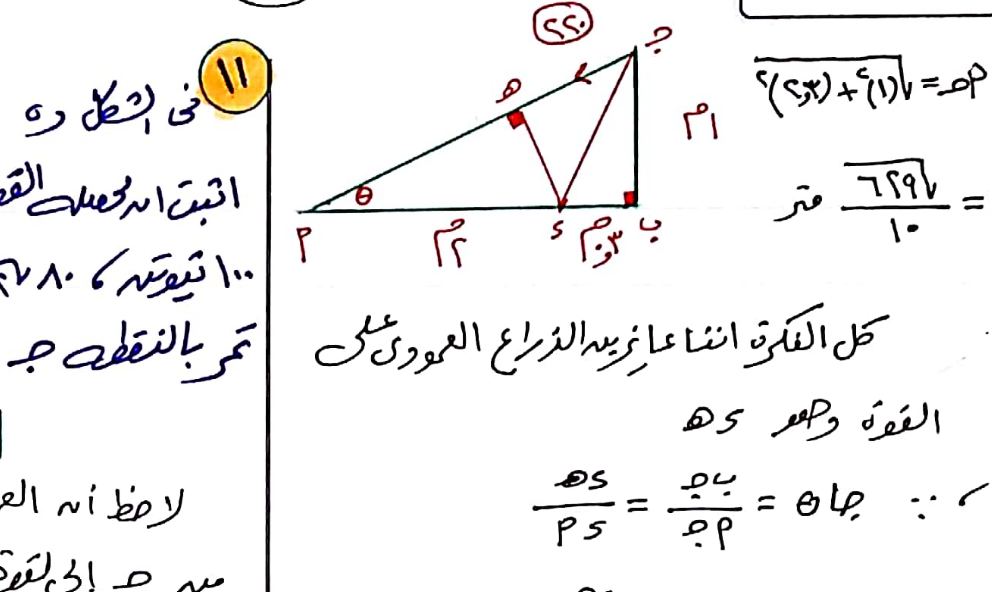
- ق × ٥٠ = - ٥٠ × ٥٠√٣
٥٠ ق = ٥٠ × ٥٠√٣
∴ ق = ٥٠√٣ نيوتن

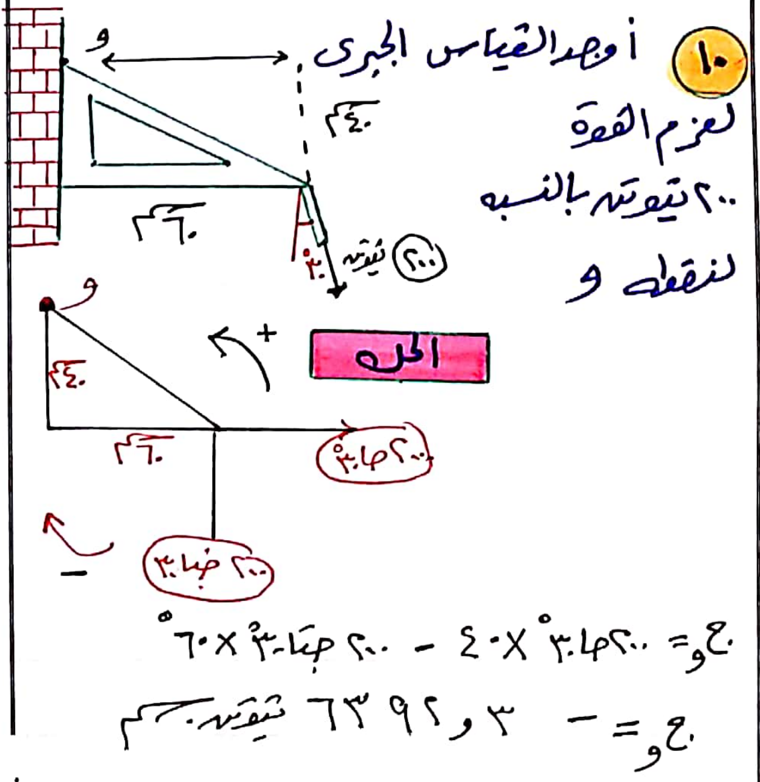


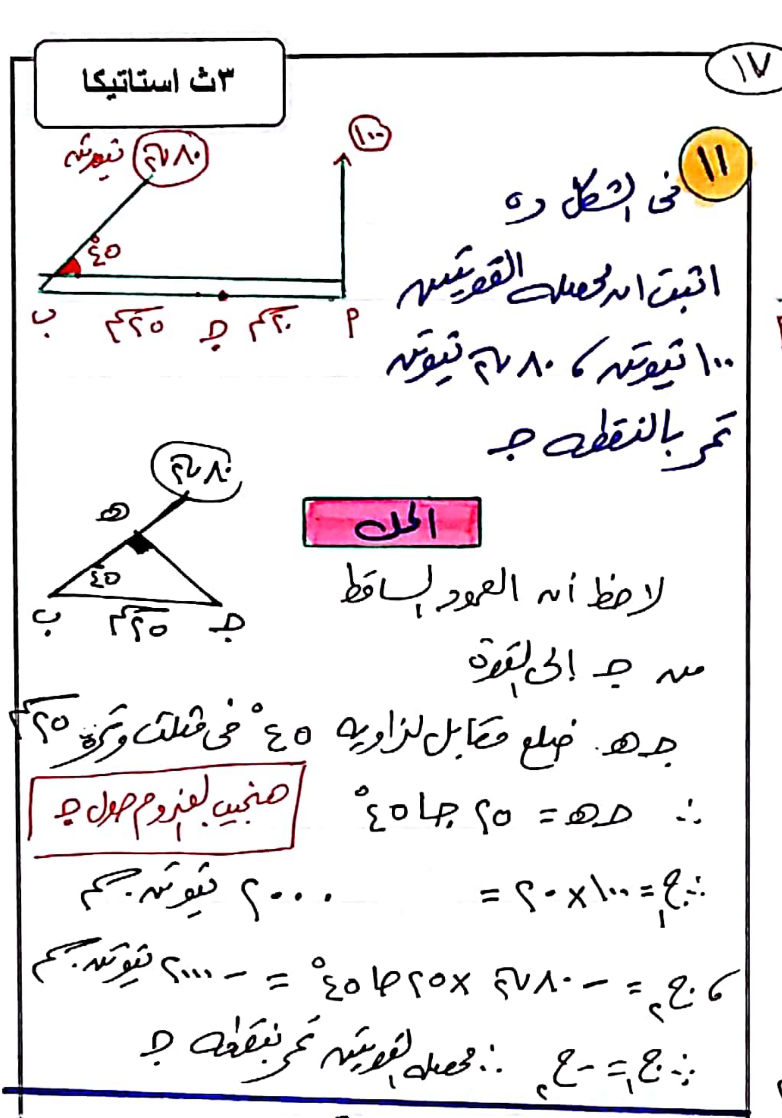
⑨ في الشكل ده
شداد أب
يؤثر على عمود مائل
جـ د أوجد معيار عزم
قوة الشد بالنسبة للنقطة د .

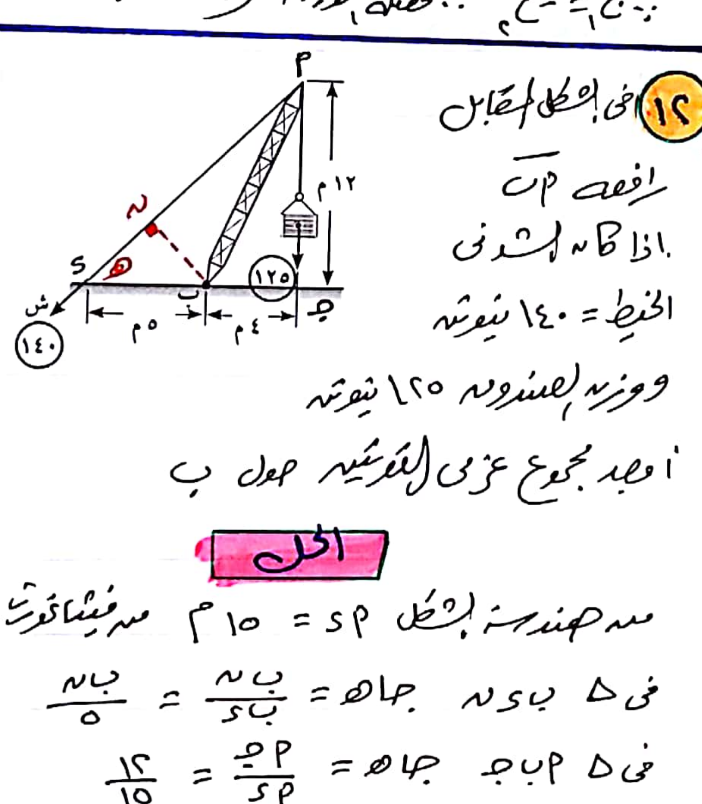
(٢٢٠) نيوتن

الحل





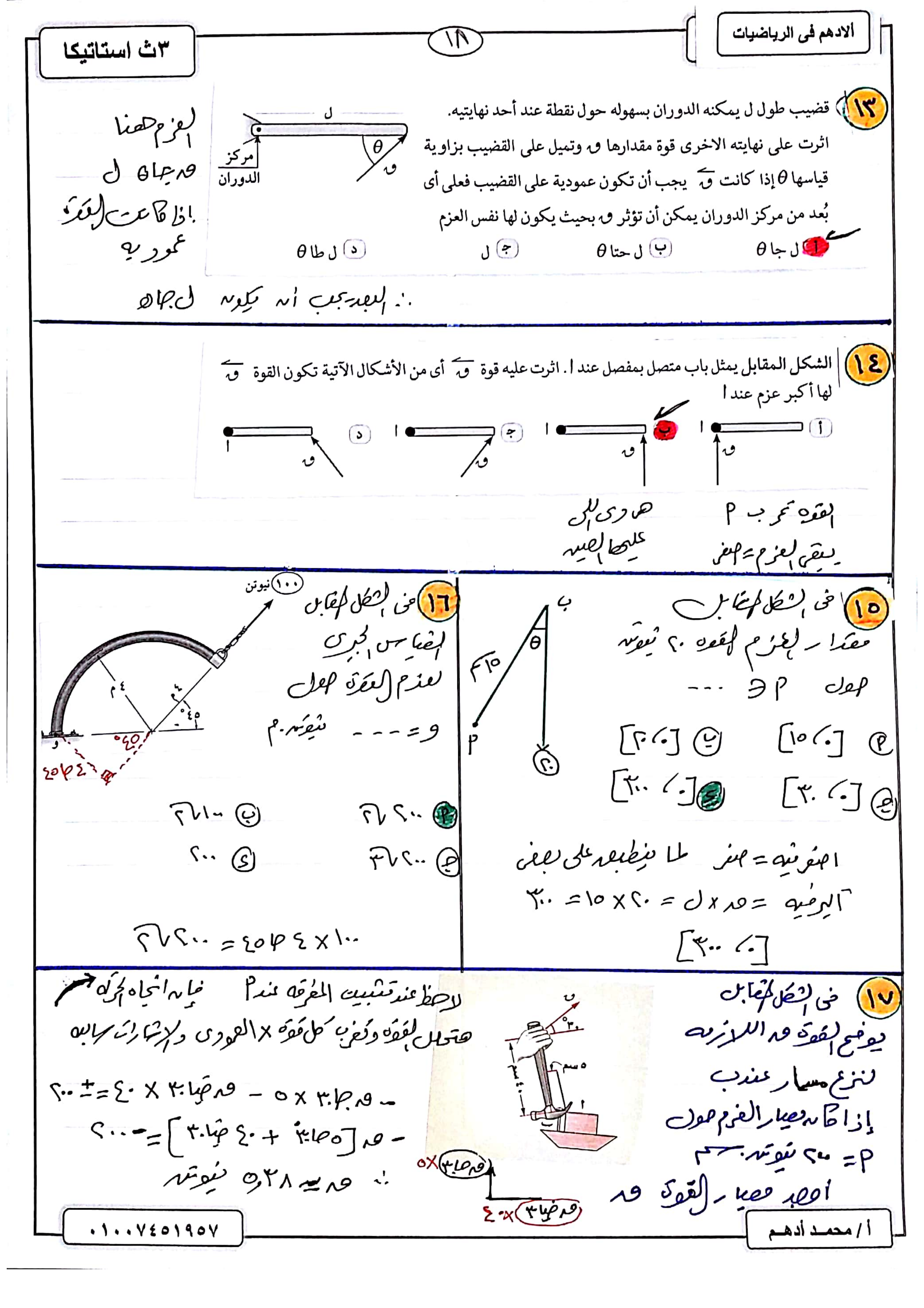




∴ مجموع عزمى القوتين حول ب

= −١٢٥ × ٤ + ١٤٠ × ٤ = ٦٠ نيوتن.م

٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧



(١٣) قضيب طول ل يمكنه الدوران بسهوله حول نقطة عند أحد نهايتيه.
اثرت على نهايته الاخرى قوة مقدارها ق وتميل على القضيب بزاوية قياسها θ إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ يجب أن تكون عمودية على القضيب فعلى أى بُعد من مركز الدوران يمكن أن تؤثر ق بحيث يكون لها نفس العزم

(أ) ل جا θ (ب) ل جتا θ (ج) ل (د) ل ظا θ

العزم هنا ق جا θ ل إذا كانت القوة عمودية
∴ البعد يجب أن يكون ل جا θ

(١٤) الشكل المقابل يمثل باب متصل بمفصل عند ا. اثرت عليه قوة $\overrightarrow{ق}$ أى من الأشكال الآتية تكون القوة $\overrightarrow{ق}$ لها أكبر عزم عند ا

القوة تمر ب ا يبقى العزم = صفر — عمودى على الطرف البعيد

(١٥) فى الشكل المقابل مقدار العزم للقوة ٢٠ نيوتن حول ا ∈ ...

(ا) [٠ ، ١٥] (ب) [٠ ، ٢٠] (ج) [٠ ، ٣٠] (د) [٠ ، ٣٠٠]

اصغر قيمة = صفر لما ينطبق على الخط
أكبر قيمة = ق × ل = ٢٠ × ١٥ = ٣٠٠
[٠ ، ٣٠٠]

(١٦) فى الشكل المقابل القياس الجبرى لعزم القوة حول و = ... نيوتن.م

(أ) ٢٠٠$\sqrt{٢}$ (ب) ٢١٠$\sqrt{٢}$ (ج) ٣٠٠$\sqrt{٢}$ (د) ٢٠٠

١٠٠ × ٤ جا ٤٥ = ٢٠٠$\sqrt{٢}$

(١٧) فى الشكل المقابل يوضح القوة ق اللازمة لنزع مسمار عند ب إذا كان مقياس العزم حول ا = ٢٠٠ نيوتن.سم أوجد مقياس القوة ق

لاحظ عند تثبيت المطرقة عند ا نحلل القوة ونضرب كل قوة × العمودى والإشارات بالنسبة لاتجاه الحركة
ق جا ٣٠ × ٥ − ق جتا ٣٠ × ٤٠ = ± ٢٠٠
− ق [٥ جا ٣٠ + ٤٠ جتا ٣٠] = −٢٠٠
∴ ق = ٥٫٣٨ نيوتن
ق جا ٣٠ × ٥ ، ق جتا ٣٠ × ٤٠

ثانياً ثلاثي الأبعاد

(١) إذا كانت:
$\overrightarrow{ق} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$
تؤثر في أ = (١ ، −١ ، ٤) أوجد

(أ) عزم $\overrightarrow{ق}$ حول و

(ب) عزم $\overrightarrow{ق}$ حول ب (٢ ، −٣ ، ١)

* ثم أوجد طول العمود المرسوم من ب إلى خط عمل القوة.

الحل

(أ) $\overrightarrow{و أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{و} = (١ ، −١ ، ٤)$

$$\therefore \overrightarrow{ج_و} = \overrightarrow{و أ} \times \overrightarrow{ق} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & −١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & −١ \end{vmatrix}$$

$= (١ − ١٢)\overrightarrow{س} − (−١ − ٨)\overrightarrow{ص} + (٣ + ٢)\overrightarrow{ع}$

$= −١١\overrightarrow{س} + ٩\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$

(ب) $\overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (١ ، −١ ، ٤) − (٢ ، −٣ ، ١)$

$= (−١ ، ٢ ، ٣)$

$$\therefore \overrightarrow{ج_ب} = \overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{ق} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ −١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & −١ \end{vmatrix}$$

$= (−٢ − ٩)\overrightarrow{س} − (١ − ٦)\overrightarrow{ص} + (−٣ − ٤)\overrightarrow{ع}$

$= −١١\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص} − ٧\overrightarrow{ع}$

* طول العمود من (ب) $= \dfrac{\|\overrightarrow{ج_ب}\|}{\|\overrightarrow{ق}\|}$

$= \dfrac{\sqrt{١٢١ + ٢٥ + ٤٩}}{\sqrt{٤ + ٩ + ١}} \simeq ٣,٧٣$ وحدة طول

---

(٢) قوة $\overrightarrow{ق} = ١٥\overrightarrow{س} − ٢٥\overrightarrow{ص} + ٤٠\overrightarrow{ع}$ (ق_س ، ق_ص ، ق_ع)

تؤثر في أ(−٣ ، −٣ ، ٢) (س ، ص ، ع)

أوجد مركبة عزم $\overrightarrow{ق}$ حول محور ص.

الحل

احفظ القوانين في أول الوحدة.

$\overrightarrow{ج_ص} = ع\, ق_س − س\, ق_ع$

$= ٢ \times ١٥ − (−٣ \times ٤٠)$

$= ١٥٠$

لو مش حافظها ممكن تعمل المحدد وتاخد $ج_ص$

---

(٣) إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ تؤثر في أ(٢ ، −١ ، ٣) فإذا كان عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل $= ٢١\overrightarrow{ص} + ٧\overrightarrow{ع}$ أوجد $\overrightarrow{ق}$ حيث $\overrightarrow{ق}$ توازي محور السينات.

الحل

من الفراغ ∵ $\overrightarrow{ق}$ توازي محور السينات

فنفرض أن $\overrightarrow{ق} = (ل ، ٠ ، ٠)$

$\overrightarrow{و أ} = \overrightarrow{أ} − \overrightarrow{و} = (٢ ، −١ ، ٣)$

∵ ج‾و = و‾أ × ق‾ = | س‾ ص‾ ع‾ ؛ ٢ -١ ٣ ؛ ل ٠ ٠ |

= (٠) س‾ - (-٣ل) ص‾ + (٠ + ل) ع‾

= ٣ل ص‾ + ل ع‾

= ٢١ ص‾ + ٧ ع‾ معطى

∴ ل = ٧

∴ ق‾ = ٧ س‾

---

٤ في الشكل المقابل قوة مقدارها ١٣٠ نيوتن تؤثر في أب‾ أوجد عزم القوة حول د

الحل

و (٠، ٠، ٠)

أ (٠، ٠، ٣)

جـ (٤، ٠، ٠)

د (٠، ١٢، ٠)

ب (٤، ١٢، ٠)

أب‾ = ب‾ - أ‾ = (٤، ١٢، -٣)

أب‾* = (٤، ١٢، -٣) / √(١٦ + ١٤٤ + ٩) = $\frac{١}{١٣}$ (٤، ١٢، -٣)

ق‾ = ق × أب‾ / ||أب‾||

ق‾ = $\frac{١٣٠}{١٣}$ (٤، ١٢، -٣)

∴ ق‾ = (٤٠، ١٢٠، -٣٠)

ج‾د = د‾أ × ق‾ (لاحظ أ هى نقطة التأثير)

د‾أ = أ‾ - د‾ = (٠، -١٢، ٣)

ج‾د = | س‾ ص‾ ع‾ ؛ ٠ -١٢ ٣ ؛ ٤٠ ١٢٠ -٣٠ |

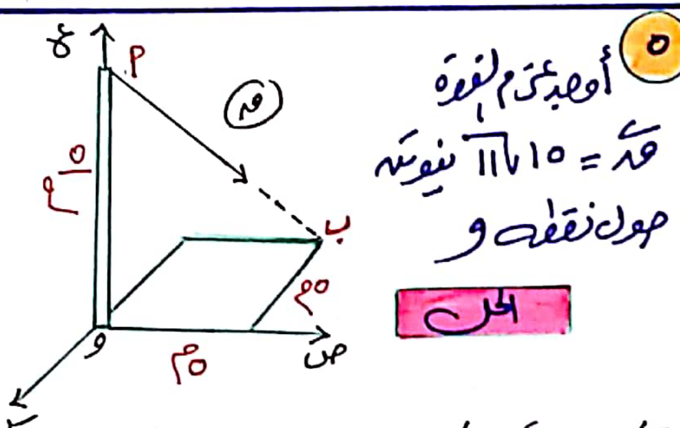
= (٣٦٠ - ٣٦٠) س‾ - (٠ - ١٢٠٠) ص‾ + (٠ + ٤٨٠) ع‾

= ٠ س‾ + ١٢٠ ص‾ + ٤٨٠ ع‾

= ١٢٠ ص‾ + ٤٨٠ ع‾

---

٥ أوجد عزم القوة ق‾ = ١٥√١١ نيوتن حول نقطة و



الحل

أ‾ = (٠، ٠، ١٥) ، ب‾ = (-٥، ٥، ٠)

أب‾ = ب‾ - أ‾ = (-٥، ٥، -١٥)

∵ ق‾ = ق × أب‾ / ||أب‾|| = ١٥√١١ × (-٥، ٥، -١٥) / √(٢٥ + ٢٥ + ٢٢٥)

∴ ق‾ = $\frac{١٥\sqrt{١١}}{٥\sqrt{١١}}$ (-٥، ٥، -١٥) = (-١٥، ١٥، -٤٥)

∵ ج‾و = و‾أ × ق‾ (لاحظ أ هى نقطة التأثير)

ج‾و = (٠، ٠، ١٥) × (-١٥، ١٥، -٤٥)

= | س‾ ص‾ ع‾ ؛ ٠ ٠ ١٥ ؛ -١٥ ١٥ -٤٥ |

= -٢٢٥ س‾ - ٢٢٥ ص‾

٦ إذا كان عزم القوة ق العمودية على ذراع الدوران بالنسبة لنقطة م = ٦٢٠ نيوتن.سم أوجد ق

الحل

∵ طول العمود = $\frac{\|\vec{جـ}_م\|}{\|\vec{ق}\|}$

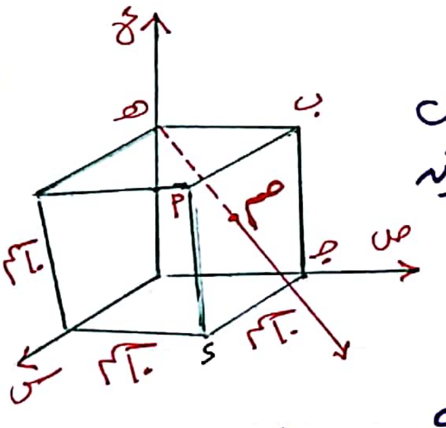
∵ طول العمود = $\sqrt{(٣٠)^2 + (٣)^2 - ٢ \times ٣٠ \times ٣ \text{ جتا } ١٠٥}$ من جيب التمام

≃ ٣٢,٦٣

∴ $\|\vec{ق}\| = \frac{٦٢٠}{٣٢,٦٣} \simeq ١٩$ نيوتن

---

٧ في الشكل المقابل قوة $٢٥\sqrt{٦}$ نيوتن تؤثر في $\overrightarrow{هـ م}$ أوجد مركبات عزم القوة بالنسبة لمحاور الإحداثيات حيث م المركز الهندسي للوجه أ ب جـ د



الحل نضع س، ص، ع

من هندسة الشكل

هـ = (٠، ٠، ١٠) ، م = (٥، ١٠، ٥)

∴ $\overrightarrow{هـ م} = \vec{م} - \vec{هـ} = (٥، ١٠، -٥)$

∴ $\vec{ق} = ق \times \frac{\overrightarrow{هـ م}}{\|\overrightarrow{هـ م}\|}$

$= ٢٥\sqrt{٦} \times \frac{(٥، ١٠، -٥)}{\sqrt{٢٥ + ١٠٠ + ٢٥}}$

$= ٥(٥، ١٠، -٥) = (٢٥، ٥٠، -٢٥)$

$\vec{جـ}_و = \overrightarrow{و هـ} \times \vec{ق} = (\vec{هـ} - \vec{و}) \times \vec{ق}$

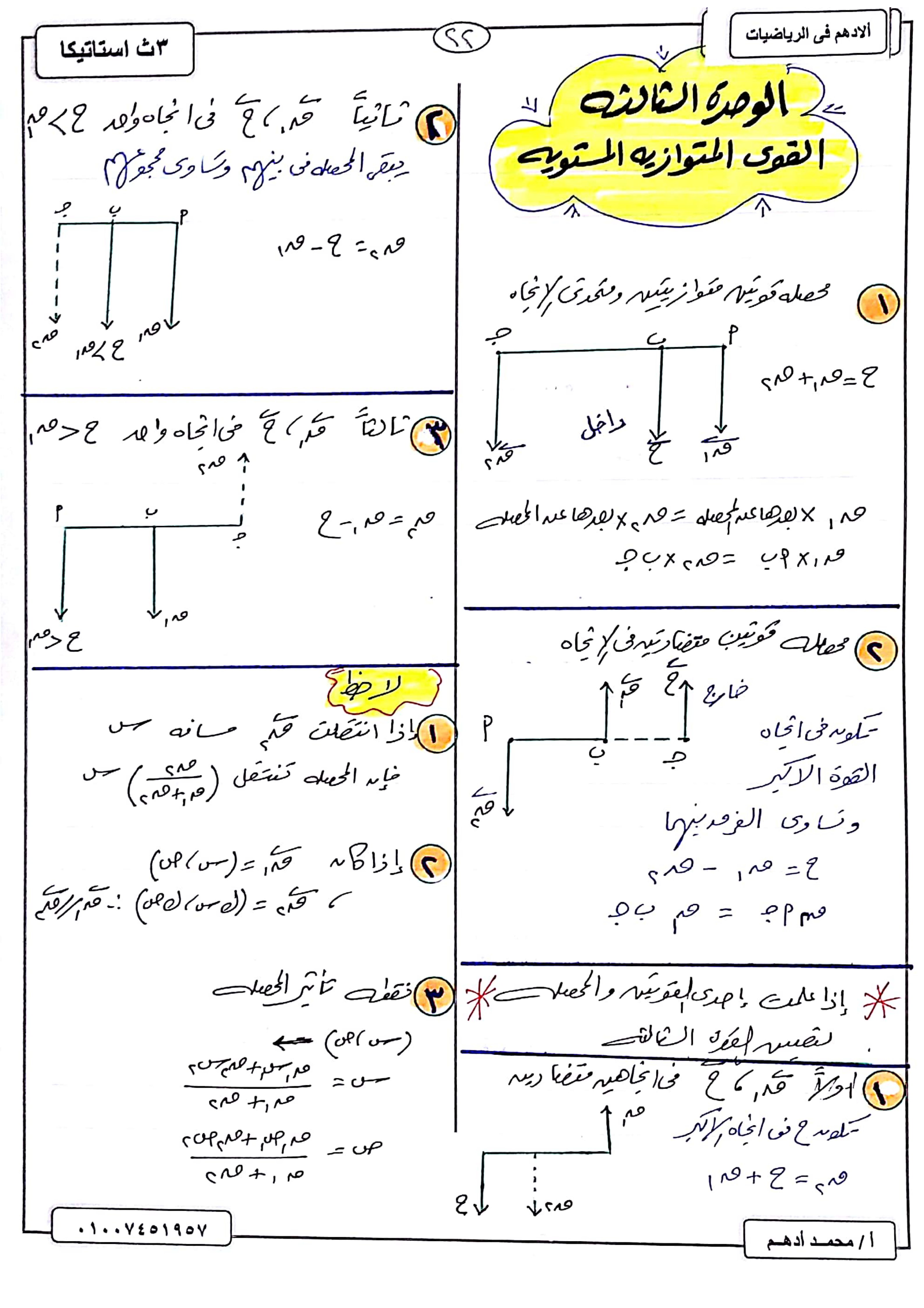
$$\begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ ٠ & ٠ & ١٠ \\ ٢٥ & ٥٠ & -٢٥ \end{vmatrix}$$

$= -٥٠٠ \hat{س} + ٢٥٠ \hat{ص}$

مركبة عزم ق حول محور س = −٥٠٠

مركبة عزم ق بالنسبة لمحور ص = ٢٥٠

مركبة عزم ق بالنسبة لمحور ع = صفر



الوحدة الثالثة
القوى المتوازية المستوية

(١) محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتي الاتجاه

ح = ق١ + ق٢

ق١ × بعدها عن المحصلة = ق٢ × بعدها عن المحصلة

ق١ × أ ب = ق٢ × ب جـ

(٢) محصلة قوتين متضادتين في الاتجاه

تكون في اتجاه القوة الأكبر وتساوي الفرق بينهما

ح = ق١ − ق٢

ق١ أ جـ = ق٢ ب جـ

* إذا علمت إحدى القوتين والمحصلة لتعيين القوة الثالثة

(١) أولاً ق١ ، ح في اتجاهين متضادين

تكون ح في اتجاه الأكبر

ق٢ = ح + ق١

(٢) ثانياً ق١ ، ح في اتجاه واحد ح > ق١

يبقى المحصلة في بينهم وتساوي مجموعهم

ق٢ = ح − ق١

(٣) ثالثاً ق١ ، ح في اتجاه واحد ح < ق١

ق٢ = ق١ − ح

لاحظ

(١) إذا انتقلت ق٢ مسافة س فإن المحصلة تنتقل (ق٢ / (ق١ + ق٢)) س

(٢) إذا كان ق١ = (س ، ص) ، ق٢ = (ل س ، ل ص) ∴ ق١ // ق٢

(٣) نقطة تأثير المحصلة (س ، ص)

س = (ق١ س١ + ق٢ س٢) / (ق١ + ق٢)

ص = (ق١ ص١ + ق٢ ص٢) / (ق١ + ق٢)

④ شرط اتزان مجموعة من القوى المتوازية

المحصلة = صفر

① س = ٠ ص = ٠

② مجموع العزوم حول أى نقطة = صفر

$ج_م$ = صفر

الحل

ع = ٩ − ٥ = ٤ نيوتن

٩ ب جـ = ٥ (٣٠ + ب جـ)

٩ ب جـ = ١٥٠ + ٥ ب جـ

٤ ب جـ = ١٥٠

∴ ب جـ = ٣٧,٥ سم

المسائل

① فى الشكل المقابل

إذا كان أ ب = ٧ سم

فإن ع = ... نيوتن

أ جـ = ... سم

(شكل: قوى ٩ عند أ، ع عند جـ، ٥ عند ب)

الحل

* ع = ٩ + ٥ = ١٤ نيوتن

٩ (أ جـ) = ٥ (ب جـ)

٩ (أ جـ) = ٥ (٧ − أ جـ)

٩ أ جـ = ٣٥ − ٥ أ جـ

١٤ أ جـ = ٣٥

* ∴ أ جـ = ٢,٥ سم

---

② فى الشكل المقابل

ع = ...

ب جـ = ...

(شكل: قوى ع عند جـ، ٩ عند ب، ٥ عند أ، أ ب = ٣٠ سم)

---

③ قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٣٥٠ نيوتن ومقدار إحدى القوتين ٥٠٠ نيوتن وتعمل على بعد ٥١ سم من المحصلة. أوجد القوة الثانية والبعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة

(أ) فى اتجاه واحد

(ب) فى اتجاهين متضادين

الحل

(أ) فى اتجاه واحد

تكون القوة $ق_٢$ فى عكس الاتجاه

(شكل: ع = ٣٥٠، $ق_١$ = ٥٠٠، ٥١ سم، س، $ق_٢$)

$ق_٢$ = ٥٠٠ − ٣٥٠ = ١٥٠ نيوتن

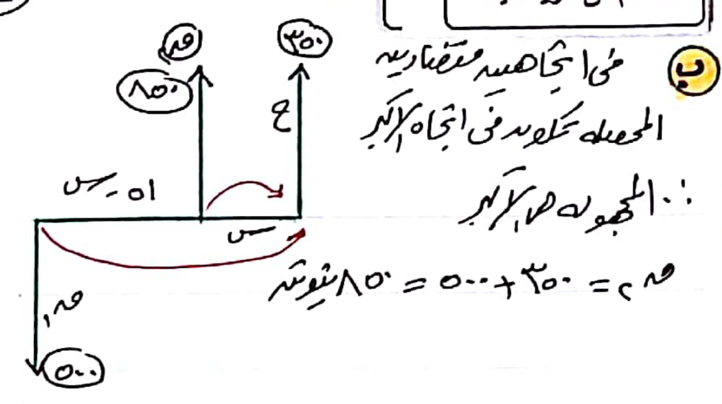
٥٠٠ × ٥١ = ١٥٠ (٥١ + س)

٥١ + س = $\frac{٥٠٠ \times ٥١}{١٥٠}$ = ١٧٠

∴ س = ١٧٠ − ٥١ = ١١٩ سم

ب متى اتجاهين متضادين المحصلة تكون في اتجاه الأكبر

∴ المجهولة هي الأكبر



ق٢ = ٣٥٠ + ٥٠٠ = ٨٥٠ نيوتن

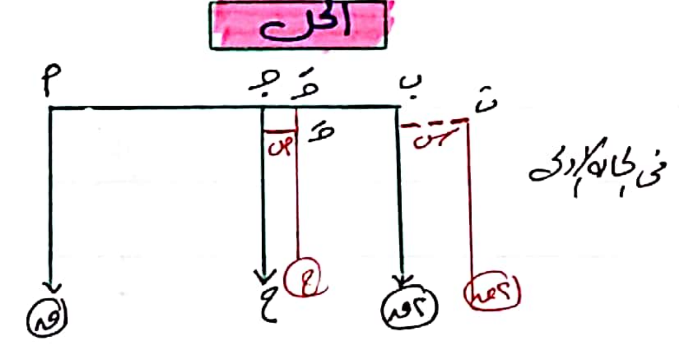
٨٥٠ س = ٥٠٠ × ٥١

∴ س = $\frac{٥٠٠ \times ٥١}{٨٥٠}$ = ٣٠ سم

البعد بينهما = ٥١ − ٣٠ = ٢١ سم

٤ قوتان متوازيتان ومتفقتان في الاتجاه مقدارهما ق ، ٢ق وتؤثران في أ ، ب بالترتيب تحركت ٢ق موازية لنفسها في اتجاه $\overrightarrow{أب}$ مسافة س سم. اثبت أن المحصلة تتحرك في نفس الاتجاه مسافة $\frac{٢}{٣}$ س سم.

الحل



أ جـ = ٢ ب جـ ← *

في الحالة الثانية نفرض أن المحصلة تحركت ص

ق × أ جَ = ٢ق (بَ جَ)

(أ جـ + ص) = ٢(س + ب جـ − ص)

∵ أ جـ = ٢ ب جـ

٢ب جـ + ص = ٢س + ٢ب جـ − ٢ص

ص = ٢س − ٢ص

٣ص = ٢س

ص = $\frac{٢}{٣}$ س #

٥ تؤثر القوتان $\overrightarrow{ق_١}$ = ٣$\hat{س}$ − $\hat{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = −٩$\hat{س}$ + ٣$\hat{ص}$ في النقطتين أ(−١، ٠) ، ب(١، ٢) على الترتيب. أوجد محصلة القوتين ونقطة تأثيرها.

الحل

$\overrightarrow{ح}$ = $\overrightarrow{ق_١}$ + $\overrightarrow{ق_٢}$

= −٦$\hat{س}$ + ٢$\hat{ص}$

∵ $\overrightarrow{ق_٢}$ = −٣$\overrightarrow{ق_١}$ ∴ القوتان متوازيتان ومتضادتان في الاتجاه.

س = $\frac{ق_١ س_١ + ق_٢ س_٢}{ق_١ + ق_٢}$ = $\frac{−٣ − ٩}{٣ − ٩}$

= $\frac{−١٢}{−٦}$ = ٢

ص = $\frac{ق_١ ص_١ + ق_٢ ص_٢}{ق_١ + ق_٢}$ = $\frac{٠ + ٦}{−١ + ٣}$ = ٣

∴ نقطة تأثير القوة هي (٢، ٣)

(٦) قوتان متوازيتان أصغرهما ٣٠ نيوتن وتؤثر في الطرف أ من قضيب خفيف أب والكبرى تؤثر في ب فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن الطرف ب بمقدار ٩٠ سم ، فما طول أب

الحل

المحصلة في اتجاه الأكبر

ح = ق − ٣٠

١٠ = ق − ٣٠

∴ ق = ٤٠ نيوتن

لاحظ أن بعد المحصلة عن ب = ٩٠ سم

∴ ب جـ = ٩٠ سم

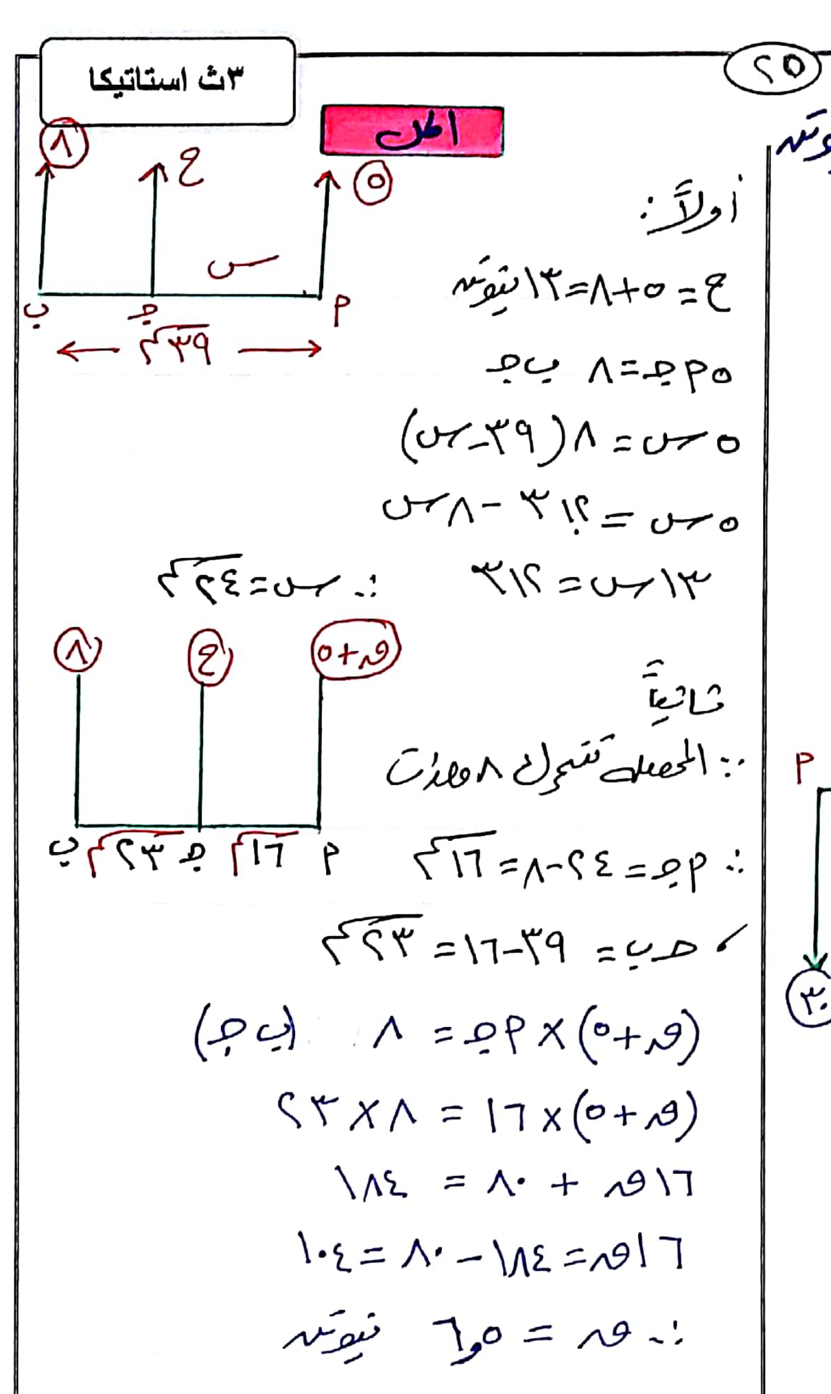
ق × ب جـ = ٣٠ × أ جـ

٤٠ × ٩٠ = ٣٠ (أب + ٩٠)

∴ (أب + ٩٠) = $\frac{٤٠ \times ٩٠}{٣٠}$ = ١٢٠

∴ أب = ١٢٠ − ٩٠ = ٣٠ سم

(٧) قوتان متوازيتان ومتحدتا الاتجاه مقداريهما ٥ ، ٨ نيوتن تؤثران في أ ، ب حيث أب = ٣٩ سم . إذا أضيف للقوة الأولى قوة أخرى مقدارها ق في نفس الاتجاه فإن المحصلة تتحرك ٨ وحدات . أوجد : ق



(٨) إذا كانت ق١ // ق٢ ، ق١ = س − ٢ص ، || ق٢ || = ٤ √٥ وحدة فإن ق٢ = ...

الحل

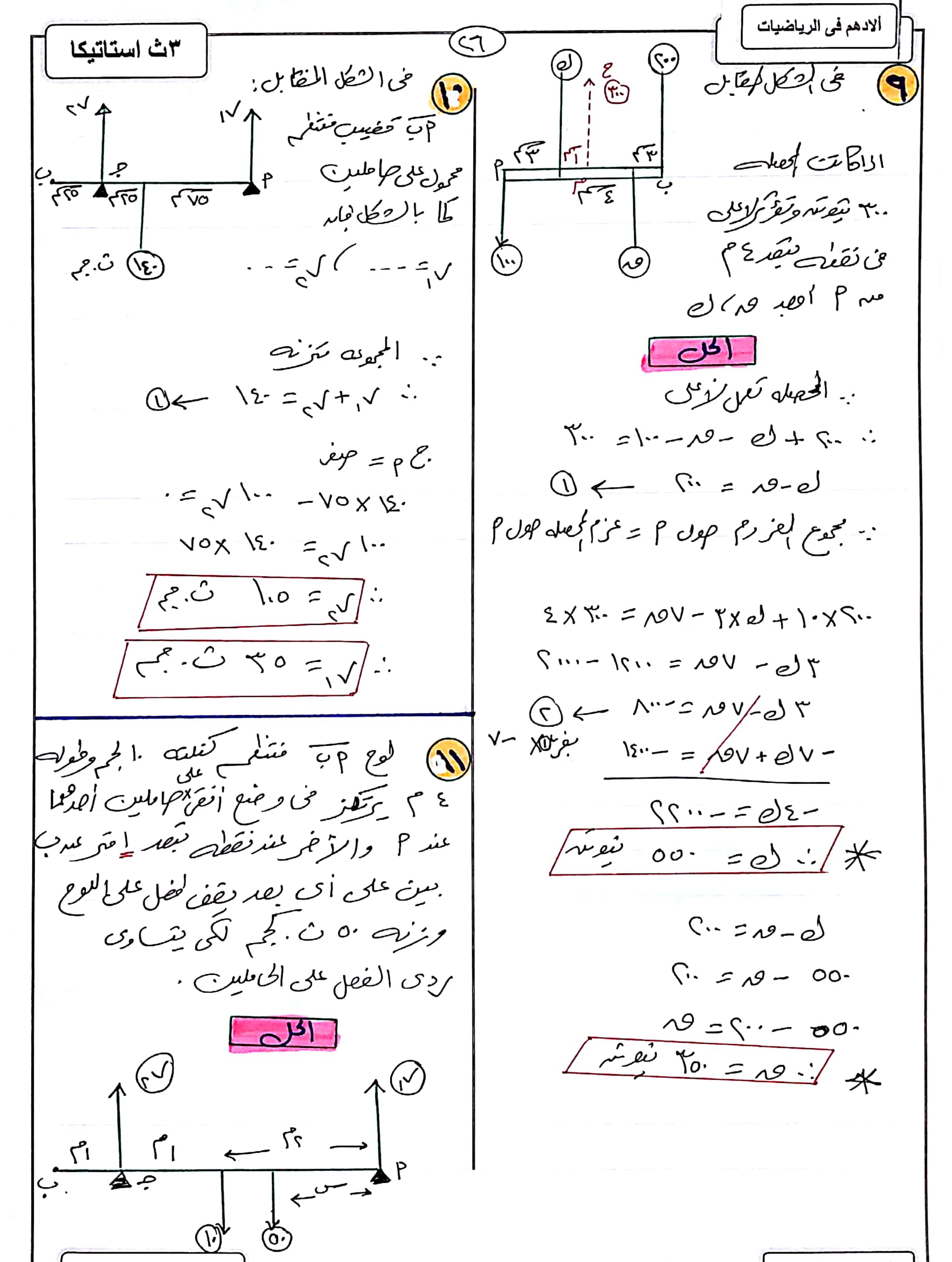
∵ ق١ // ق٢ ∴ ق٢ = ل ق١

|| ق٢ || = || ل ق١ || ← || ق٢ || = |ل| || ق١ ||

٤ √٥ = |ل| √٥ ∴ |ل| = ٤

∴ ل = ±٤

∴ ق٢ = ٤ س − ٨ ص أو ق٢ = −٤ س + ٨ ص



(٩) في الشكل المقابل الأثقال المحصلة ٣٠٠ نيوتن وتؤثر رأسياً لأعلى في نقطة تبعد ٤ م من أ أوجد و، ك

الحل

∵ المحصلة تعمل رأسياً

∴ ٢٠٠ + ك − و − ١٠٠ = ٣٠٠

ك − و = ٢٠٠ ← (١)

∵ مجموع العزوم حول أ = عزم المحصلة حول أ

٢٠٠ × ١٠ + ك × ٣ − ٧و = ٣٠٠ × ٤

٣ك − ٧و = ١٢٠٠ − ٢٠٠٠

٣ك − ٧و = −٨٠٠ ← (٢)

بضرب (١) × −٧

−٧ك + ٧و = −١٤٠٠

−٤ك = −٢٢٠٠

∴ ك = ٥٥٠ نيوتن

ك − و = ٢٠٠

٥٥٠ − و = ٢٠٠

٥٥٠ − ٢٠٠ = و

∴ و = ٣٥٠ نيوتن

(١٠) في الشكل المقابل: أب قضيب منتظم محمول على حاملين كما بالشكل أوجد ر١ = ...، ر٢ = ...

∵ المجموعة متزنة

∴ ر١ + ر٢ = ١٤٠ ← (١)

ح_جـ = صفر

١٤٠ × ٧٥ − ١٠٠ ر٢ = ٠

١٠٠ ر٢ = ١٤٠ × ٧٥

∴ ر٢ = ١٠٥ ث.جم

∴ ر١ = ٣٥ ث.جم

(١١) لوح أب منتظم كتلته ١٠ جم وطوله ٤ م يرتكز في وضع أفقي على حاملين أحدهما عند أ والآخر عند نقطة تبعد ١م عن ب. بين على أي بعد يقف طفل على اللوح وزنه ٥٠ ث.جم لكي يتساوى ردي الفعل على الحاملين.

الحل

نفرض أن الطفل يبعد مسافة س عن م

∵ المجموعة متزنة

∴ $ر_1 + ر_2 = ١٠ + ٥٠$

$ر_1 + ر_2 = ٦٠$ ← (١)

لكى يتساوى ردى الفعل

∴ $ر_1 = ر_2 = ٣٠$ ث.كجم

∵ $ج_م = 0$

$٥٠ س + ١٠ × ٢ = ٣٠ × ٣$

$٥٠ س = ٩٠ - ٢٠$

$٥٠ س = ٧٠$

∴ $س = ١.٤$ م

∴ الطفل يبعد ١.٤ م من أ

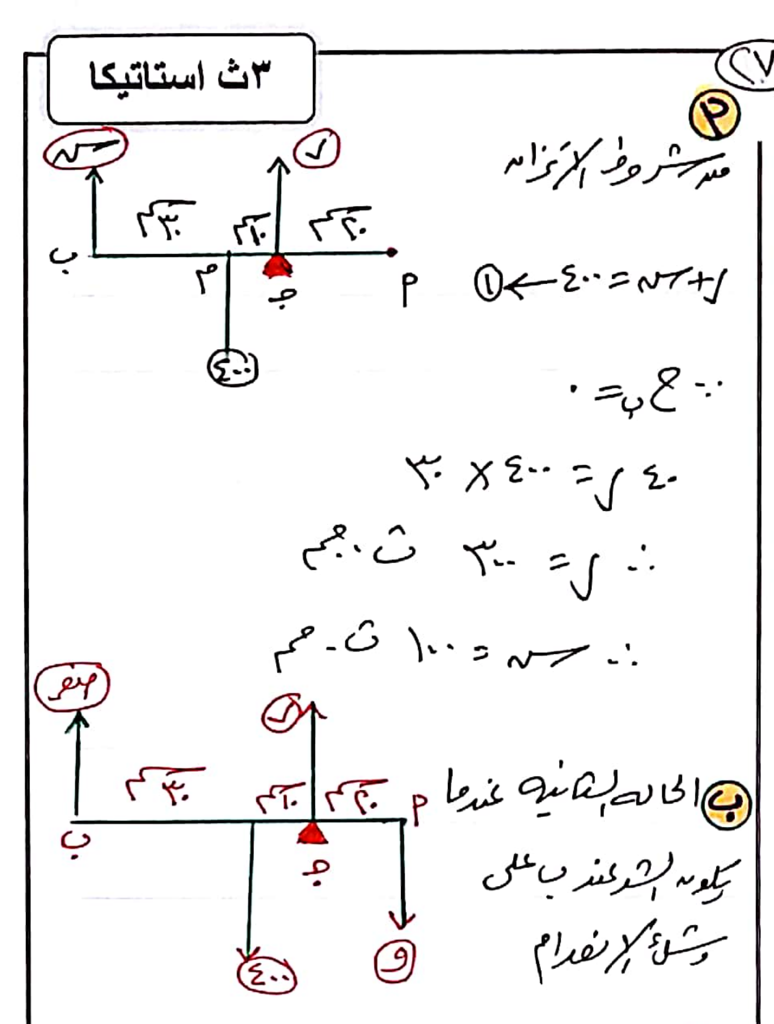
---

(١٢) يرتكز قضيب أب طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠٠ ث.جم يؤثر عند نقطة منتصفه على وتد يبعد ٢٠ سم من أ ضغط القضيب أفقياً فى حالة إتزان بواسطة خيط خفيف رأسى يتصل بطرفه ب أوجد

(أ) مقدار كل من الشد فى الخيط ورد فعل الوتد.

(ب) مقدار الثقل الذى يلزم تعليقه من أ ليجعل الشد فى الخيط على وشك أن ينعدم

الحل



(أ) من شروط الإتزان

$ر + ش = ٤٠٠$ ← (١)

∵ $ج_ب = ٠$

$٤٠ ر = ٤٠٠ × ٣٠$

∴ $ر = ٣٠٠$ ث.جم

∴ $ش = ١٠٠$ ث.جم

(ب) الحالة الثانية عندما يكون الشد عند ب على وشك الانعدام

$ج_ج = $ صفر

$٢٠ و = ٤٠٠ × ١٠$

∴ $و = ٢٠٠$ ث.جم

---

(١٣) أبجد قضيب غير منتظم يرتكز فى وضع الاتزان أفقياً على حاملين أملسين عند ب ، ج حيث أد = ٦٠ سم ، جد = ٧ سم ونقطة تأثير وزن القضيب تقسمه بنسبة ٢ : ٣ من جهة الطرف أ فوجد أنه لو علق من الطرف أ ثقل قدره ١٢٠ ث.جم أو من الطرف د ثقل قدره ١٨٠ ث.جم كان القضيب على وشك الدوران

أوجد وزن القضيب والبعد بين الحاملين

الحل

عند تعليق ثقل ١٢٠ ث.جم من م يكون القضيب على وشك الدوران حول ب

$\therefore$ ر‍م = ٠

، $\because$ ع‍ب = ٠

$\therefore$ و(٢س − ٦) − ١٢٠ × ٦ = ٠

و(٢س − ٦) = ١٢٠ × ٦

و(س − ٣) = ٣٦٠ ← ①

عند تعليق ثقل ١٨٠ ث.جم من ء يصبح القضيب على وشك الدوران حول ج

$\therefore$ ر‍ج = ٠

، $\because$ ع‍ج = صفر

$\therefore$ ١٨٠ × ٧ − و(٣س − ٧) = ٠

و(٣س − ٧) = ١٨٠ × ٧ ← ②

بقسمة ② على ①

$$\frac{و(٣س - ٧)}{و(س - ٣)} = \frac{١٨٠ \times ٧}{٣٦٠}$$

$$\frac{٣س - ٧}{س - ٣} = \frac{٧}{٢}$$

٦س − ١٤ = ٧س − ٢١

٧س − ٦س = −١٤ + ٢١

$\therefore$ س = ٧

$\therefore$ ب‍م = ٨ سم ، ج‍م = ١٤ سم

$\therefore$ البعد بين الحاملين = ٨ + ١٤ = ٢٢ سم

من ①

$\therefore$ و(٧ − ٣) = ٣٦٠

٤و = ٣٦٠

$\therefore$ و = ٩٠ ث.جم

---

١٤ تؤثر القوى المستوية المتزنة والمتوازية ق١ ، ق٢ ، ق٣ ، ق٤ في النقط أ(٢ ، ١) ، ب(−٤ ، −٣) ، ج(٣ ، ٥) ، ء(−١ ، ٠) على الترتيب فإذا كانت

ق١ = ٣س + ٤ص ، ||ق٢|| = ٢٠ نيوتن في نفس اتجاه ق١ . أوجد كلاً من ق٣ ، ق٤ إذا كانت تعملان في اتجاه مضاد لاتجاه ق١ .

الحل

$\because$ ق٢ // ق١ $\therefore$ ق٢ = ل ق١

$\therefore$ ||ق٢|| = |ل| ||ق١||

٢٠ = |ل| × ٥ $\therefore$ |ل| = ±٤

ولأنهما في نفس الاتجاه $\therefore$ ل = ٤

∴ ق٢ = ١٢ س + ١٦ ص

∵ ق٢ // ق٣ ∴ ق٣ = م ق٢

∴ ق٣ = (٣م ، ٤م)

∵ القوى متزنة ∴ جـ = صفر

∴ د ص × ق١ + د ب × ق٢ + د جـ × ق٣ = ٠

∴ (٢ ، -١) × (٤ ، ٣) + (-٣ ، -٣) × (١٢ ، ١٦)

\+ (٤ ، ٥) × (٣م ، ٤م) = ٠

∴ ١٢ + ٣ − ٤٨ + ٣٦ + ١٦م − ١٥م = ٠

٣ + م = ٠

∴ م = −٣

∴ ق٣ = −٩ س − ١٢ ص

∵ القوى متزنة

∴ ق١ + ق٢ + ق٣ + ق٤ = ٠

∴ ق٤ = −ق١ − ق٢ − ق٣

∴ ق٤ = −٦ س − ٨ ص

---

(١٥) ثلاث قوى متوازية ق١ ، ق٢ ، ق٣ تؤثر على قضيب فى النقط أ ، ب ، جـ والتى تبعد ٢ سم ، ٨ سم ، ٦ سم على الترتيب من أحد طرفيه فإذا كان القضيب متزن فإن ق١ : ق٢ : ق٣ = ...

(أ) **[١ : ٢ : ٣]** (ب) ٢ : ٣ : ١

(جـ) ٣ : ٢ : ١ (د) ١ : ٣ : ٢

---

(١٦) أب قضيب منتظم وزنه ١٠ نيوتن فإذا كان أكبر ثقل يمكن تعليقه من الطرف أ دون أن يختل التوازن هو ك فإن ك = ...

أ ٢٠سم ب ٣٠سم ٤٠سم جـ ٢٠سم ب ، ر١ ، ر٢ ، ك ، ١٠

٢٥ نيوتن ٢٠ نيوتن **[١٥ نيوتن]** ٥ نيوتن

أكبر ثقل عند أ ∴ القضيب على وشك الانفصال عن جـ

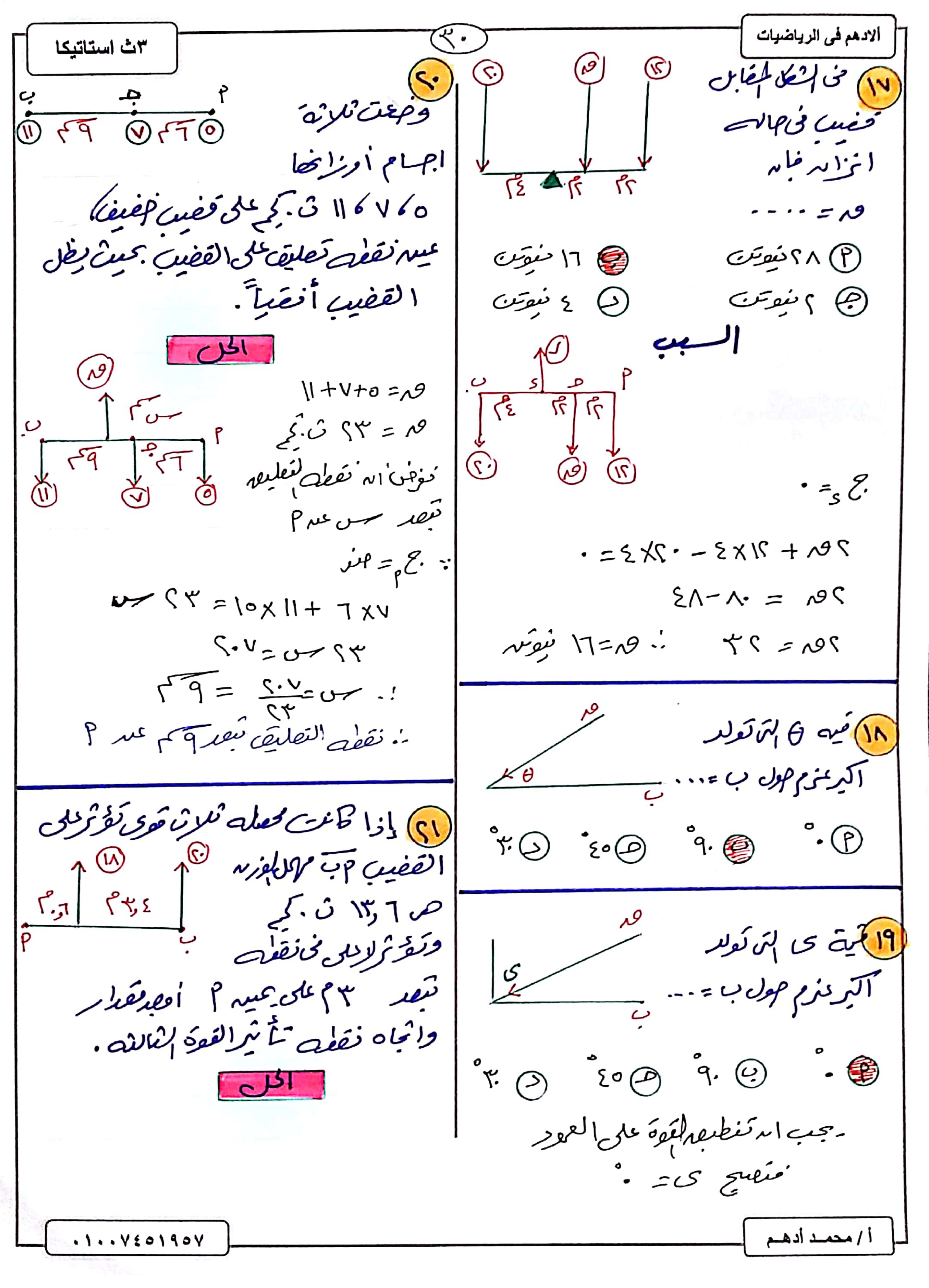
∴ ر٢ = ٠ ، ∵ جـ ب = ٠

٢٠ ك = ٣٠ × ١٠

∴ ك = ١٥ نيوتن

ذاكر وركز واصبر

واتعلم الصبر من الزمالك تعهد يتغلب من الأهلى ١٢ سنة فى الدورى وفى الآخر ربنا كرمه وقدر يغلب الأهلى فى ماتش الفرقة كلها كانت غايبة .



١٧ في الشكل المقابل قضيب في حالة اتزان فإن ق = ...

(أ) ٢٨ نيوتن (ب) ١٦ نيوتن (ج) ٢ نيوتن (د) ٤ نيوتن

السبب

$ج_د = ٠$

٢ق + ١٢ × ٤ − ٢٠ × ٤ = ٠

٢ق = ٨٠ − ٤٨

٢ق = ٣٢ ∴ ق = ١٦ نيوتن

١٨ قيمة θ التي تولد أكبر عزم حول ب = ...

(أ) ٠° (ب) ٩٠° (ج) ٤٥° (د) ٣٠°

١٩ قيمة ى التي تولد أكبر عزم حول ب = ...

(أ) ٠° (ب) ٩٠° (ج) ٤٥° (د) ٣٠°

يجب ان تنطبق القوة على العمود فتصبح ى = ٠°

٢٠ وضعت ثلاثة أجسام أوزانها ٥، ٧، ١١ ث.كجم على قضيب خفيف. عين نقطة تعليق على القضيب بحيث يظل القضيب أفقياً.

الحل

ق = ٥ + ٧ + ١١

ق = ٢٣ ث.كجم

نفرض أن نقطة التعليق تبعد س عن أ

$∵ ج_أ = صفر$

٧ × ٦ + ١١ × ١٥ = ٢٣ س

٢٣ س = ٢٠٧

∴ س = $\frac{٢٠٧}{٢٣}$ = ٩ سم

∴ نقطة التعليق تبعد ٩ سم عن أ

٢١ إذا كانت محصلة ثلاث قوى تؤثر على القضيب أب مهمل الوزن ص ٦، ١٣ ث.كجم وتؤثر إلى أعلى في نقطة تبعد ٣ م على يمين أ. أوجد مقدار واتجاه نقطة تأثير القوة الثالثة.

الحل

∵ ٢٠ ك + ١٨ ك + ق = $١٣,٦$ ك

∴ ق = ($١٣,٦ - ٣٨$) ك

∴ ق = $- ٢٤,٤$ ك

أى تؤثر لأسفل

∵ مجموع عزوم القوى حول م = عزم المحصلة حول أ

$- ٢٤,٤ \times س + ١٨ \times ٠,٦ + ٢٠ \times ٤ = ١٣,٦ \times ٣$

$- ٢٤,٤ س = ١٣,٦ \times ٣ - ١٨ \times ٠,٦ - ٢٠ \times ٤$

$- ٢٤,٤ س = - ٥٠$

∴ س = $٢,٠٥$ م بعداً عن أ لأسفل

---

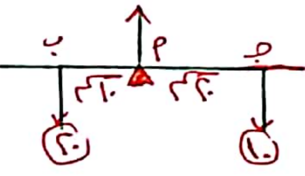
٢٢ الشكل المقابل يمثل قضيب منتظم يرتكز على حامل عند منتصفه ، وضع عليه جسم كما بالشكل أى من القوى الآتية تحدث توازنه للقضيب ....

(أ) قوة ١٠ نيوتن لأعلى على بعد ٢٠ سم يمين منتصف القضيب

(ب) قوة ١٠ نيوتن لأسفل على بعد ٢٠ سم يمين منتصف القضيب

(ج) قوة ٣٠ نيوتن لأعلى على بعد ٥ سم يسار منتصف القضيب

(د) قوة ٣٠ نيوتن لأسفل على بعد ٥ سم يسار " " .



هذا هو الاختيار الذى يجعل جـم = صفر

$- ١٠ \times ٢٠ + ٢٠ \times ١٠ =$ صفر

---

٢٣ قضيب منتظم طوله ٤ م يرتكز على نقطة ارتكاز عند منتصفه علق ثقلان ٣ ، ٤ ث.كجم من احدى نصفيه وعلى بعد ١ ، ١,٥ م من منتصفه على الترتيب وعلق ثقلان ٥ ث.كجم ، و ث.كجم من النصف الآخر على بعد $\frac{1}{2}$ ، ٢ م على الترتيب من منتصفه. فإذا اتزن القضيب فما قيمة و

الحل

∵ جـ = صفر

∴ $٥ \times ٠,٥ + و \times ٢ = ٤ \times ١ + ٣ \times ١,٥$

$٢ و = ٤ + ٤,٥ - ٢,٥$

$٢ و = ٦$ ∴ و = ٣ ث.كجم

---

٢٤ قوتان متوازيتان ومتضادتان فى الاتجاه مقدار أحدهما ٧ نيوتن ومقدار محصلتهما ١٠ نيوتن فإن مقدار القوة الأخرى = ...

(أ) ٣ نيوتن (ب) ١٧ نيوتن

(ج) ٢٧ نيوتن (د) ٦ نيوتن

ح تكون فى اتجاه الأكبر

ق − ١٠ = ٧

ق = ٧ + ١٠ = ١٧



① تكون مجموعة قوى متزنة إذا وفقط إذا كان

أ) $\vec{ح} = \vec{0}$ ينعدم المحصلة

ب) $\vec{جـ} = \vec{0}$ ينعدم العزم حول أى نقطة

$\vec{ح} = \vec{0}$ ← مجـ س = ٠ ، مجـ ص = ٠

② أى كلمة أملس يكون رد الفعل عمودى

③ مسائل المستوى الخشن يتحلل رد الفعل المحصل إلى رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك وتكون فى عكس اتجاه الحركة

④ فى مسائل المفصل يكون رد الفعل غير معلوم الاتجاه لذلك يحلل إلى س١ ، ص١ ويكون محصلته

$ر = \sqrt{س_١^2 + ص_١^2}$

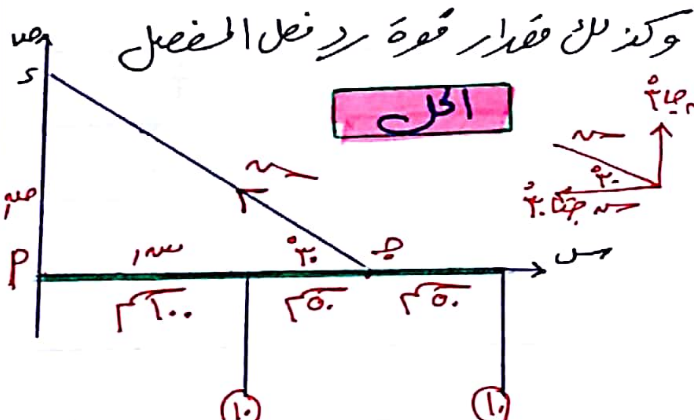
$ظا هـ = \frac{ص_١}{س_١}$

واستعينوا بالصبر والصلاة

المسائل

① قضيب منتظم أب طوله ٢٠٠ سم ومقدار وزنه ١٠ نيوتن يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى ويحمل عند طرفه ب ثقلاً يساوى وزنه حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة حبل يتصل أحد طرفيه بنقطة على القضيب تبعد ١٥٠ سم عن أ والطرف الآخر بنقطة على الحائط رأسياً أعلى أ فإذا كان الحبل يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° عين مقدار الشد فيه وكذلك مقدار قوة رد فعل المفصل

الحل



∵ القضيب متزن ∴ مجـ س = ٠ ، مجـ ص = ٠

ش جا ٣٠ + ص١ = ١٠ + ١٠

$\frac{1}{2}$ ش + ص١ = ٢٠

∴ ص١ = ٢٠ − $\frac{1}{2}$ ش ← ①

س١ − ش جتا ٣٠ = ٠

∴ س١ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ش ← ②

∵ جـ = صفر

$٥٠ \times ١٠ - ٥٠ \times ١٠ + ١٥٠ \times ص_١ = ٠$

∴ $١٥٠ ص_١ = ٠$

∴ $ص_١ = ٠$ فى ①

∴ $٠ = ٢٠ - \frac{١}{٢} ش$

$\frac{١}{٢} ش = ٢٠$

∴ $ش = ٤٠$ ث.كجم فى ②

∴ $س_١ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٤٠$

$س_١ = ٢٠\sqrt{٣}$ ث.كجم

∴ $ر = \sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢} = \sqrt{٠ + (٢٠\sqrt{٣})^٢}$

$ر = ٢٠\sqrt{٣}$ ث.كجم

ويؤثر أفقياً فى اتجاه $\overleftarrow{م ب}$

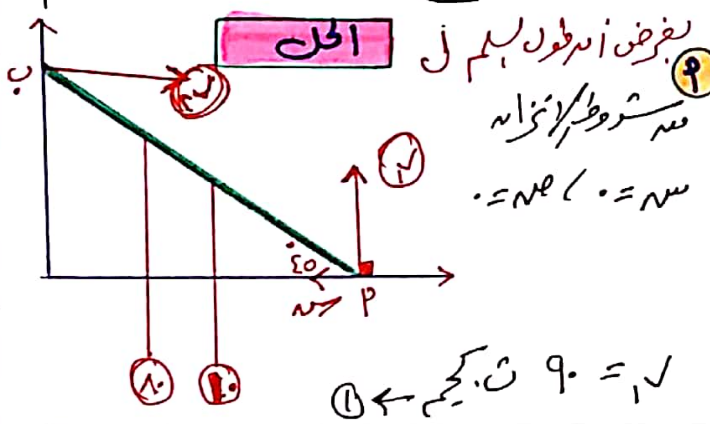
---

② يرتكز سلم منتظم وزنه ١٠ ث.كجم بطرفه م على مستوى أملس والطرف ب على حائط رأسى أملس . حفظ السلم فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف م بنقطة من المستوى الأفقى رأسياً أسفل ب يصعد رجل وزنه ٨٠ ث.كجم هذا السلم أوجد

(أ) قوة الشد فى الحبل عندما يقطع الرجل $\frac{٣}{٤}$ طول السلم

(ب) أقصى شد للحبل علماً بأنه يكون على وشك الانقطاع عندما يصل الرجل لقمة السلم

الحل



(أ) بفرض أن طول السلم ل

من شروط الاتزان

س = ٠ ، ص = ٠

$ر_١ = ٩٠$ ث.كجم ← ①

$ر_٢ = ش$ ← ②

∵ $جـ_م = ٠$

$١٠ \times \frac{١}{٢} ل جتا٤٥ + ٨٠ \times \frac{٣}{٤} ل جتا٤٥ = ر_٢ ل جا٤٥$

$٥ جتا٤٥ + ٦٠ جتا٤٥ = ر_٢ جا٤٥$

$٦٥ جتا٤٥ = ر_٢ جا٤٥$

∴ $ر_٢ = ٦٥$ ث.كجم

∵ $ر_٢ = ش$

∴ $ش = ٦٥$ ث.كجم

(ب) عندما يصعد الرجل لقمة السلم يكون المسافة المقطوعة = طول السلم = ل

ويكون $ر_١ = ٩٠$ ث.كجم

$ر_٢ = ش$ ← *

$جـ_م = ٠$

$١٠ \times \frac{١}{٢} ل جتا٤٥ + ٨٠ ل جتا٤٥ = ر_٢ ل جا٤٥$

$٨٥ = ر_٢$

∴ $ش = ٨٥$ ث.كجم

(٣) قضيب منتظم يرتكز فى مستوٍ رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى على مستوٍ أفقى معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{1}{4}$
أوجد ظل الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق

الحل

من شروط الانزلاق

$ر_1 = و \quad \leftarrow (1)$

$ر_2 = \frac{1}{4} ر_1 = \frac{1}{4} و \quad \leftarrow (2)$

$ج_م = 0$

$و \times \frac{1}{2} ل جتا هـ = ر_2 \times ل جا هـ$

$\therefore ر_2 = \frac{1}{4} و$

$\frac{1}{2} و جتا هـ = \frac{1}{4} و جا هـ \quad \times 4$

$2 جتا هـ = جا هـ$ (قسم جتا هـ فاضى)

$\frac{جا هـ}{جتا هـ} = \frac{2}{1}$

$\therefore ظا هـ = 2$ أى ظـ هـ

(٤) $\overline{أب}$ سلم منتظم طوله ٥ م ووزنه ٢٠ ث.كجم استند السلم بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك بينهما $\frac{1}{4}$ وكان الطرف ب على بعد ٣ م من الحائط . أثبت أن السلم لا يمكن أن يتزن فى هذه الحالة ثم أوجد أصغر وزن لجسم معامل الاحتكاك بينه وبين الأرض $\frac{1}{5}$ بحيث إذا وضع عند الطرف ب يمنعه من الانزلاق

الحل

نفرض أن السلم قد يتزن

$\therefore ر_1 = ح$

، $ر_2 = 20$ ث.كجم

، $ج_ب = 0$

$20 \times 1.5 = ر_1 \times 4$

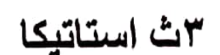
$\therefore ر_1 = 7.5$ ث.كجم

$\therefore ح = 7.5$ ث.كجم

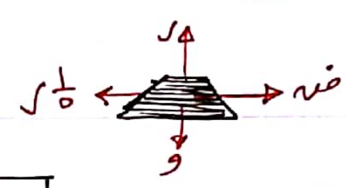
$م ر_2 = \frac{1}{4} \times 20 = 5$

$\therefore ح > ح_س$ وهذا مرفوض

$\therefore$ السلم لا يمكن أن يتزن



بعد وضع الجسم الذي وزنه (و)



∵ ر = و ∴ ض = $\frac{1}{5}$ و

وعند القوة التي يؤثر بها على طرف السلم السفلى

أ
٤م
٢٠
$\frac{1}{5}$ و + $\frac{1}{4}$ ر٢

من شروط الاتزان

ر٢ = ٢٠ ث.كجم

ر١ = $\frac{1}{5}$ و + $\frac{1}{4}$ ر٢

جـ ب = ٠

١٫٥ × ٢٠ = ٤ ر١

∴ ر١ = ٧٫٥ ث.كجم

∵ ر١ = $\frac{1}{5}$ و + $\frac{1}{4}$ ر٢

∴ $\frac{1}{5}$ و + $\frac{1}{4}$ × ٢٠ = ٧٫٥

$\frac{1}{5}$ و = ٢٫٥

∴ و = ١٢٫٥ ث.كجم

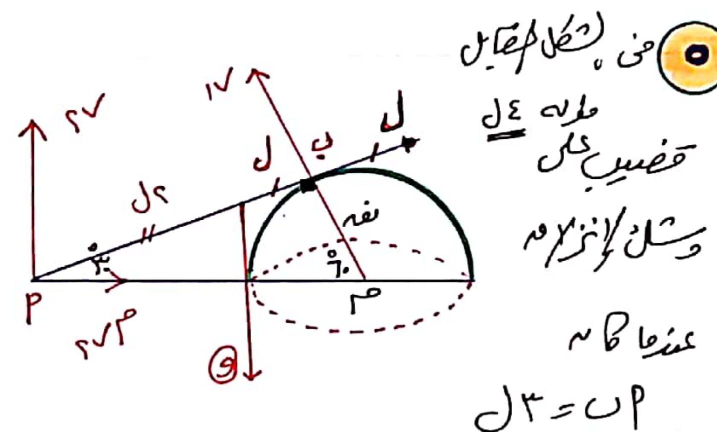
---

(٥) في الشكل المقابل ٤ ل طوله قضيب على وشكل الاتزان عندما كان

أ ن = ٣ ل

ق(∠ن م أ) = ٦٠°

أوجد مقدار الاتكائين ر١ ، ر٢



الحل

∵ نصف القطر عمودي على المماس

ر١ جتا٦٠
ر١
ر١ جا٦٠
٣٠
٦٠
٣٠

∴ ق(∠ب أ م) = ٣٠°

نحلل ر١ إلى أفقي ر١ جتا٦٠ ، رأسي ر١ جا٦٠

معادلات الاتزان

ر١ جا٦٠ + ر٢ = و

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ر١ + ر٢ = و ← (١)

، ر١ جتا٦٠ = م ر٢

$\frac{1}{2}$ ر١ = م ر٢ ← (٢)

، جـ أ = صفر

− و × ٢ل جتا٣٠ + ٣ل ر١ = ٠

٣ ر١ = ٢ و جتا٣٠

∴ ٣ ر١ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و × ٢

∴ ر١ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و ، من (١)

∴ ر٢ = $\frac{1}{2}$ و

∴ $\frac{1}{2}$ × $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و = م × $\frac{1}{2}$ و

∴ م = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

٦ اختر الإجابة الصحيحة

١ إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى خشن كان اتجاه رد الفعل ....

(أ) عمودي على المستوى (ب) موازياً للمستوى
(ج) غير معلوم الاتجاه (د) يصنع ٤٥° مع المستوى

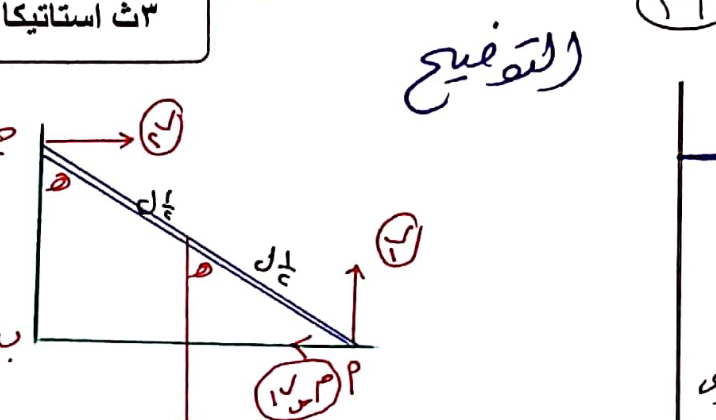
٢ يستند سلم منتظم بطرفه العلوي على حائط أملس رأسي وبطرفه السفلي على مستوى أفقي خشن معامل الاحتكاك بينهما = $\frac{1}{4}$ فكان على وشك الانزلاق فإن ظل زاوية ميل السلم على الرأسي = ...

(أ) $\frac{\pi}{6}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$
(ج) $\tan^{-1}\frac{1}{4}$ (د) $\tan^{-1}\frac{1}{2}$

٣ سلم منتظم يستند بطرفه السفلي على مستوى أفقي خشن وبطرفه العلوي على حائط رأسي أملس وكانت الزاوية بين السلم والرأسي «هـ» وكان السلم على وضع الاتزان ليحدث وكان معامل الاحتكاك السكوني (م س) فإن ظا هـ = ...

(أ) م س (ب) ٢ م س
(ج) $\frac{3}{2}$ م س (د) م س + ١

التوضيح



$ر_1 = و$ ← ①

$ر_2 = م_س ر_1$ ∴ $ر_2 = م_س و$ ← ②

∵ جـ م = ٠

$\frac{1}{2}$ ل جا هـ و = $ر_2$ × ل جتا هـ

$\frac{1}{2}$ و جا هـ = م س و جتا هـ

$\frac{1}{2}$ $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = م س $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ ÷ جتا هـ

$\frac{1}{2}$ ظا هـ = م س

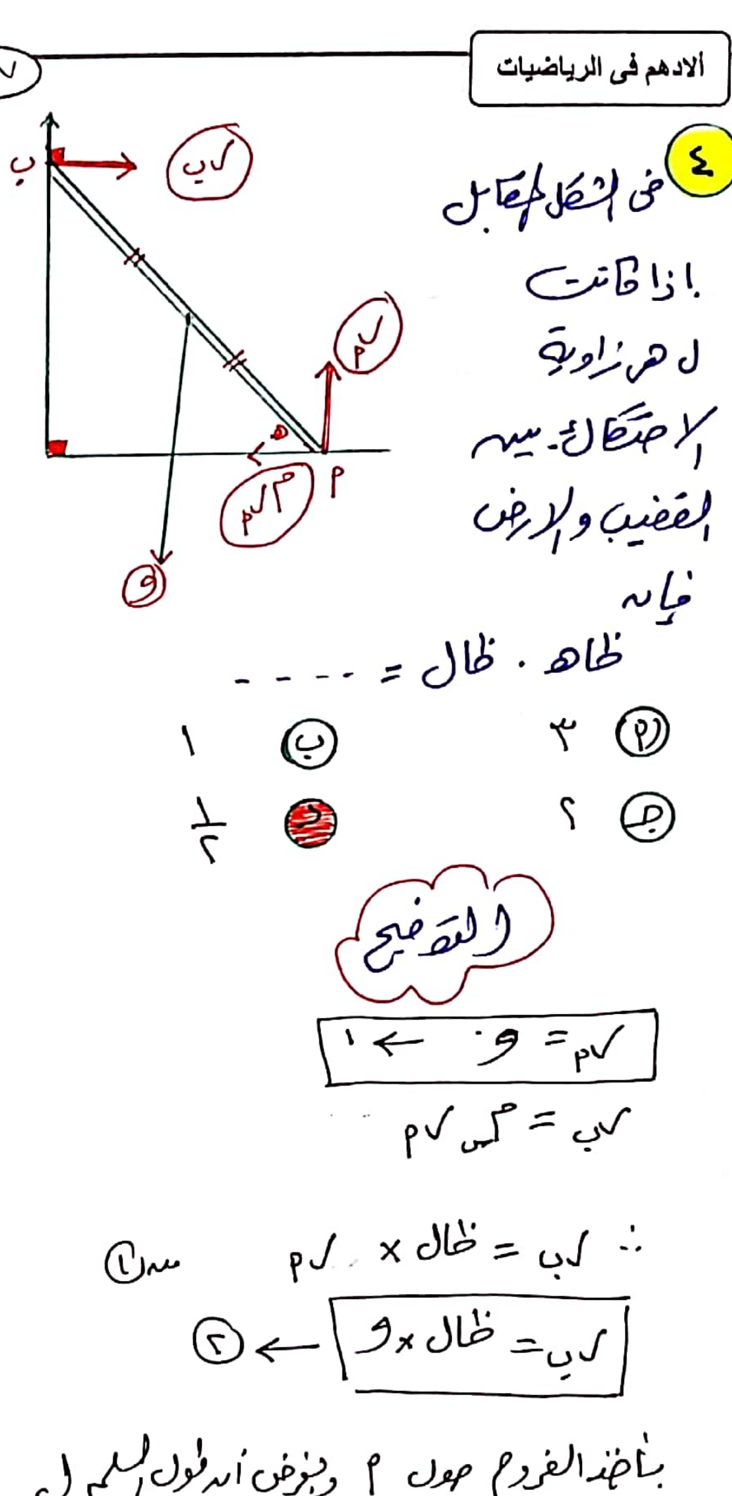
∴ ظا هـ = ٢ م س أى ضعف

لاحظ

بالدي نفس حل رقم (٢) ولكن آخر خطوة

ظا هـ = ٢ × $\frac{1}{4}$

ظا هـ = $\frac{1}{2}$ ∴ هـ = $\tan^{-1}\frac{1}{2}$



٤ في الشكل المقابل إذا كانت ل هي زاوية الاحتكاك بين القضيب والأرض فإن ظاهـ . ظال = - - - -

(أ) ٣ (ب) ١

(ج) ٢ (د) $\frac{1}{2}$

التوضيح

$ر_أ = و \rightarrow ١$

$ر_ب = م_س \, ر_أ$

$\therefore ر_ب = ظال \times ر_أ$ ... ①

$ر_ب = ظال \times و \rightarrow ②$

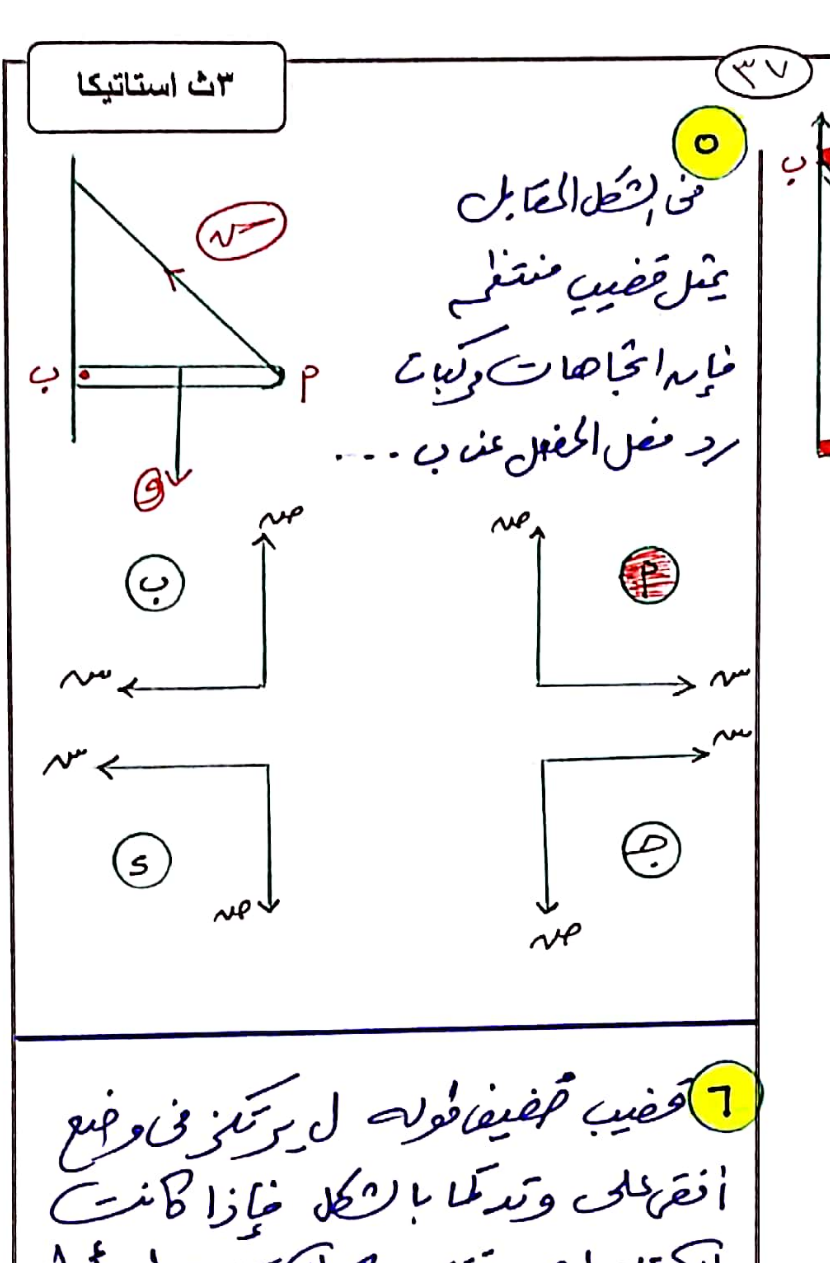
بأخذ العزوم حول أ ونفرض أن طول السلم ل

$\therefore و \times \frac{1}{2} ل \, جتاهـ = ر_ب \, ل \, جاهـ$

$\frac{1}{2} و \, جتاهـ = ر_ب \, جاهـ$ ... ③

$\frac{1}{2} و \, جتاهـ = ظال \, و \, جاهـ$ (÷ جتاهـ)

$\frac{1}{2} = ظال \, ظاهـ$



٥ في الشكل المقابل يمثل قضيب منتظم فإن اتجاهات مركبات رد فعل المفصل عند ب . . .

٦ قضيب خفيف طوله ل يرتكز في وضع أفقي على وتد كما بالشكل فإذا كانت الأثقال ك تتزن مع الثقلتين ك١، أو ك٢ منفردتين كما هو بالشكل فإن قيمة ك بدلالة ك١، ك٢

(أ) $ك_1 + ك_2$ (ب) $\frac{1}{2}(ك_1 + ك_2)$

(ج) $ك_1 ك_2$ (د) $\sqrt{ك_1 ك_2}$

$ك س = ك_2 ص$

$ك ص = ك_1 س$

$ك = \frac{ص}{س} ك_2 \rightarrow ①$

$ك = \frac{س}{ص} ك_1 \rightarrow ②$

بضرب المعادلتين

$\therefore ك^2 = ك_1 ك_2 \quad \therefore ك = \sqrt{ك_1 ك_2}$

(٧) $\overline{أب}$ قضيب رفيع خفيف طوله ٢ل معلق في مستوى رأسي من طرفيه أ، ب بخيطين يميلان على الرأسي بزاويتين ٣٠°، ٦٠° على الترتيب. علق في القضيب الثقلان ٢، ٨ نيوتن على بعد من أ = $\frac{١}{٥}$ ل ، $\frac{٦}{٥}$ ل

أوجد في وضع التوازن مقدار الشد في الخيطين وقياس زاوية ميل القضيب على الأفقي.

الحل

معادلات الاتزان

ش١ جا٣٠° = ش٢ جا٦٠°

∴ $\frac{١}{٢}$ ش١ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ش٢

ش١ = $\sqrt{٣}$ ش٢ ← (١)

، ش١ جتا٣٠° + ش٢ جتا٦٠° = ١٠ (٢) من (١)

$\sqrt{٣}$ ش٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ش٢ × $\frac{١}{٢}$ = ١٠

$\frac{٣}{٢}$ ش٢ + $\frac{١}{٢}$ ش٢ = ١٠

٢ ش٢ = ١٠

∴ ش٢ = ٥ نيوتن

ش١ = ٥$\sqrt{٣}$ نيوتن

∵ ع ب = صفر

∴ −٨ × $\frac{٤}{٥}$ ل جتاθ − ٢ × $\frac{٩}{٥}$ ل جتاθ − ٥$\sqrt{٣}$ جا٣٠° × ٢ل جاθ + ٥$\sqrt{٣}$ جتا٣٠° × ٢ل جتاθ = ٠

÷ ل جتاθ

$-\frac{٣٢}{٥} - \frac{١٨}{٥}$ − ٥$\sqrt{٣}$ ظاθ + ١٥ = ٠

٥$\sqrt{٣}$ ظاθ = $-\frac{٣٢}{٥} - \frac{١٨}{٥}$ + ١٥

٥$\sqrt{٣}$ ظاθ = ٥

∴ ظاθ = $\frac{٥}{٥\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

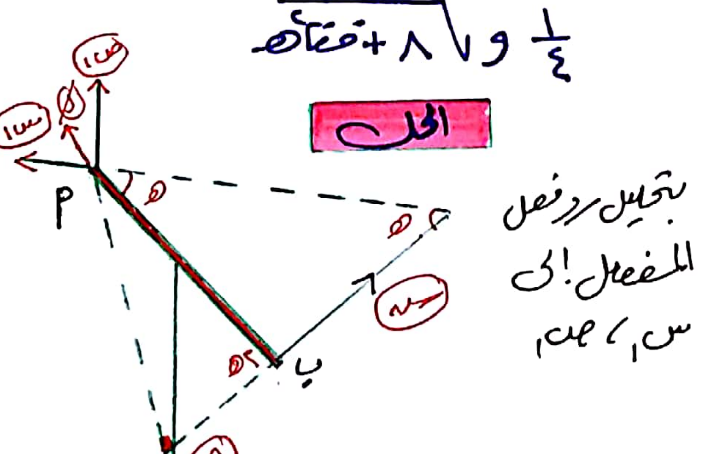
∴ θ = ٣٠° وهي زاوية ميل القضيب على الأفقي

---

(٨) قضيب منتظم وزنه (و) يتصل أحد طرفيه بمفصل ويتصل طرفه الآخر بخيط مربوط في نقطة في نفس المستوى الأفقي المار بالمفصل بحيث كان قياس زاوية ميل كل من القضيب والخيط على الأفقي مساوٍ هـ

اثبت أن رد فعل المفصل = $\frac{١}{٤}$ و $\sqrt{٨ + قتا^٢هـ}$

الحل



بتحليل رد فعل المفصل إلى س١، ص١

∴ معادلات الاتزان :

شد جاهـ ، شد جتاهـ ، ش ، و

$س_١ = ش جتاهـ$ ← ①

$ص_١ + ش جاهـ = و$

$ص_١ = و - ش جاهـ$ ← ②

∴ $ج_م = ٠$

$ش × ل جا ٢هـ = و × \frac{١}{٢} ل جتاهـ$

$ش × ٢ جاهـ جتاهـ = \frac{١}{٢} و جتاهـ$

÷ جاهـ

$٢ ش = \frac{١}{٢} و \frac{١}{جاهـ}$

$\frac{١}{٢} و قتاهـ = ٢ ش$

∴ $ش = \frac{١}{٤} و قتاهـ$

بالتعويض فى ①

∴ $س_١ = \frac{١}{٤} و قتاهـ × جتاهـ$ ... $\frac{١}{جاهـ}$

$س_١ = \frac{١}{٤} و ظتاهـ$

فى ②

، $ص_١ = و - \frac{١}{٤} و جاهـ × \frac{١}{جاهـ}$

$ص_١ = \frac{٣}{٤} و$

∴ رد فعل المفصل

$ر = \sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢}$

$ر = \sqrt{\frac{١}{١٦} و^٢ ظتا^٢هـ + \frac{٩}{١٦} و^٢}$

$ر = \frac{١}{٤} و \sqrt{ظتا^٢هـ + ٩}$

تذكر أن $١ + ظتا^٢هـ = قتا^٢هـ$

∴ $٩ + ظتا^٢هـ = قتا^٢هـ + ٨$

∴ $ر = \frac{١}{٤} و \sqrt{٨ + قتا^٢هـ}$ #.

---

⑨ عندما يوضع قضيب داخل اناء كروى أملس فإنه يتزن عندما يمر خط عمل الوزن ....

بمركز الكرة



١ الازدواج هو نظام مكون من قوتين متساويتين في المعيار متضادتين في الاتجاه لا يجمعهما خط عمل واحد

٢ عزم الازدواج = عزم احدى قوتيه بالنسبة لنقطة على خط عمل القوة الأخرى.

٣ معيار عزم الازدواج = معيار القوة × الذراع العمودي

٤ الإشارة

مع عقارب الساعة −

عكس عقارب الساعة +

٥ شرط اتزان ازدواجين

$\vec{ج}_1 + \vec{ج}_2 = \vec{0}$

أو

$\vec{ج}_1 = -\vec{ج}_2$

٦ شرط تكافؤ ازدواجين

$\vec{ج}_1 = \vec{ج}_2$

٧ الازدواج لا يكافئ إلا ازدواج

٨ يتوقف تأثير الازدواج في الأجسام المتماسكة على

معيار عزمه — المستوى الذي تقع فيه قوتاه

متى تكافئ المجموعة ازدواج

١ كل زوج من القوى يكافئ ازدواج ومجموع الازدواجات = مقدار ثابت ≠ ٠

٢ إذا كانت المحصلة = ٠ ومجموع عزوم القوى حول نقطة ≠ ٠

٣ إذا أمكن تمثيلها في اتجاه دوري واحد لمضلع القوى ممثلة تمثيلاً تاماً فإن معيار عزم الازدواج =

ضعف مساحة المضلع × $\frac{\text{القوة}}{\text{طول الضلع}}$

٤ إذا كان مجموع القياسات الجبرية بالنسبة لثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يساوي مقداراً ثابتاً ≠ ٠ فإن المجموعة تكافئ ازدواج

معيار عزمه = المقدار الثابت



① إذا كان $ق_١$ ، $ق_٢$ تكونان إزدواج فإن $ق_١$ = ...

$ق_١ = - ق_٢$

② إذا كان $ج_١ + ج_٢ = ٠$ فإن الازدواجين متزنين

إذا كان $ج_١ = ج_٢$ فإن الازدواجين متكافئين

③ إذا كان $ق_١ = (٣، ب)$
$ق_٢ = (-أ، ٥)$
تكونان إزدواج فإن (أ، ب) = ...

$ق_١ = - ق_٢$

أ = ٣ ب = -٥

∴ (أ، ب) = (٣، -٥)

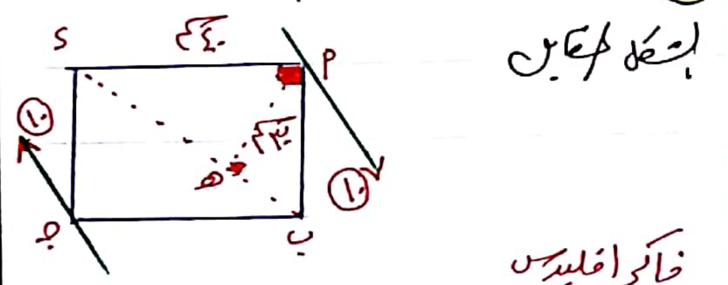
④ القياس الجبرى لعزم الازدواج المقابل

= ---

-٤٠ × ٥٠

= -٢٠٠٠ نيوتن.سم

⑤ القياس الجبرى لعزم الازدواج فى الشكل المقابل



خاطر إقليدس

هننزل عمود من رأس القائمة أ على ب ء
وهيكون البعد العمودى بين القوتين = ٢ × الناتج

$$أهـ = \frac{أب \times أء}{ب ء} = \frac{٣٠ \times ٤٠}{٥٠}$$
← فيثاغورث

∴ البعد العمودى = ٢ × ٢٤ = ٤٨ سم

∴ عزم الازدواج = - ١٠ × ٤٨

= - ٤٨٠ نيوتن.سم

⑥ إذا كان $ق_١$ ، $ق_٢$ قوتى ازدواج بحيث $ق_١ = -٣ س + ٢ ص$ وتؤثر فى أ (١، ١) ، $ق_٢$ تؤثر فى ب (-١، ٢) أوجد $ق_٢$ ثم أوجد عزم الازدواج وكذلك طول العمود المرسوم من أ على خط عمل $ق_٢$

الحل

∵ القوتان تكونان إزدواج

∴ $ق_١ = - ق_٢$

∴ $ق_٢ = ٣ س - ٢ ص$

عزم الازدواج = عزم قوة حول نقطة على خط عمل القوة الأخرى

= عزم $\overline{ق_1}$ حول ب أو العكس

$\overline{ج_ب} = \overline{ب أ} \times \overline{ق_1}$

$\overline{أ - ب} = (٢، -١)$

$\therefore ج = (٢، -١) \times (-٣، ٢)$

$= (٤ - ٣)\ \overline{ع}$

$= \overline{ع}$

البعد بين أ إلى ق٢

$ل = \frac{\|\overline{ج}\|}{\|\overline{ق_2}\|} = \frac{١}{\sqrt{٩+٤}} = \frac{١}{\sqrt{١٣}}$ وحدة طول

$\because$ القوتان (١٨، ١٨) تكونان إزدواج

$\therefore ج_1 = ١٨ \times ١٦ = ٢٨٨$ نيوتن.سم

$\because$ القوتان (٣٢، ٣٢) تكونان إزدواج

$\therefore ج_2 = - ٣٢ \times ٦ = - ١٩٢$ نيوتن.سم

$\because$ القوتان (٢٠، ٢٠) تكونان إزدواج

$\therefore ج_3 = - ٢٠ \times ٤,٨ = - ٩٦$ نيوتن.سم

$\therefore ج_1 + ج_2 + ج_3 = ٢٨٨ - ١٩٢ - ٩٦ = ٠$

$\therefore$ المجموعة متزنة #.

⑦ فى الشكل المقابل

أب = ٦ سم

ب هـ = ١٦ سم.

اثبت أن المجموعة متزنة.

الحل

نسقط وتر ⊥ أهـ من أقليدس

و هـ $= \frac{٨ \times ٦}{١٠} = ٤,٨$ سم

⑧ أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٨ سم ب جـ = ٦ سم

، س ، ص ، ع ، ل منتصفات الأضلاع

أب ، ب جـ ، جـ د ، د أ على الترتيب

أثرت القوى ق، ق، ق، ق، ٦، ٦ نيوتن

فى $\overrightarrow{أ س}$ ، $\overrightarrow{جـ ع}$ ، $\overrightarrow{ص س}$ ، $\overrightarrow{ل ع}$ ، $\overrightarrow{ل ص}$ ،

، $\overrightarrow{أ ل}$ على الترتيب اذا اتزنت

مجموعة القوى أوجد فيه ق

الحل

نفس فكرة السؤال اللى فات بالضبط

حاول تحلها

فى الآخر ق = ٤٠ نيوتن

٩ أب قضيب خفيف طوله ٥٠ سم. تؤثر قوتان مقدار كل منهما ٣٠ نيوتن فى أ، ب فى اتجاهين متضادين عمودى على القضيب. وأثرت قوتان آخريان مقدار كل منهما ١٠٠ نيوتن فى اتجاهين متضادين فى جـ، ء حيث جـ ء = ٣٠ سم بحيث يكونان ازدواجاً يكافئ الازدواج المكون. أوجد قياس زاوية ميل القوتين الأخريين على القضيب.

الحل

٣٠ ١٠٠ س ٣٠ هـ أ ب ء جـ ١٠٠ ٣٠

نسقط عمود من جـ على القوة الثانية طوله س

س = ٣٠ جا هـ

معيار عزم الازدواج الأول = ٣٠ × ٥٠

= ١٥٠٠ نيوتن

لكى يتكافئ الازدواجان يجب أن يكونا فى نفس الاتجاه

−١٠٠ × س = −١٥٠٠

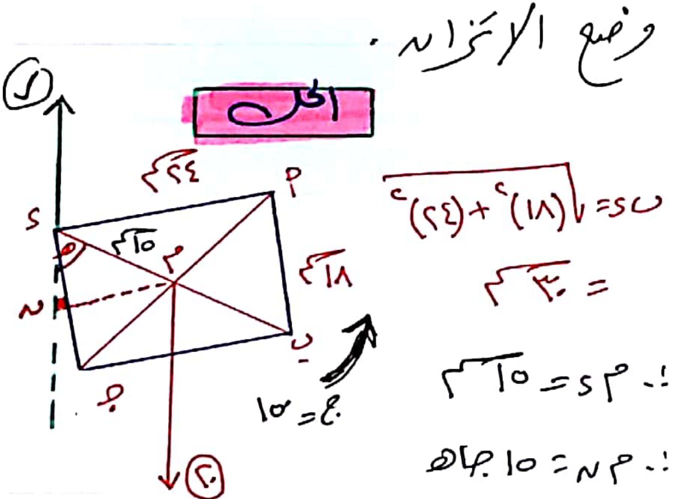
١٠٠ × ٣٠ جا هـ = ١٥٠٠

جا هـ = $\frac{1}{2}$

∴ هـ = ٣٠°

١٠ أ ب جـ ء صفيحة رقيقة على هيئة مستطيل فيه أب = ١٨ سم، ب جـ = ٢٤ سم ووزنها ٢٠ نيوتن ويؤثر فى نقطة تلاقى القطرين. علقت فى مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس ء بحيث كان مستواها رأسياً. فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ١٥٠ نيوتن.سم واتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة فأوجد زاوية ميل ءب على الرأسى فى وضع الاتزان.

الحل



ء ب = $\sqrt{(١٨)^2 + (٢٤)^2}$

= ٣٠ سم

∴ م ء = ١٥ سم

∴ م ن = ١٥ جا هـ

∵ الصفيحة متزنة تحت تأثير ازدواجين

∴ القوتان (ر، ٢٠) تكونان ازدواج قياسه الجبرى = −١٥٠ نيوتن.سم

∴ −١٥٠ = −٢٠ × م ن

٢٠ × ١٥ جا هـ = ١٥٠ ∴ جا هـ = $\frac{1}{2}$

∴ ق(هـ) = ٣٠° أو ١٥٠°

∴ قياس زاوية ميل ب ء على الرأسى لأسفل = ٣٠° أو ١٥٠°

اختر

(١١) أى من الشروط الآتيه لا تغير من تأثير الازدواج على الجسم ؟

(أ) إزاحة الازدواج إلى موضع جديد فى مستواه.
(ب) إزاحة الازدواج فى مستوى آخر يوازى مستواه .
(ج) دوران الازدواج فى نفس مستواه .
(د) كل ما سبق .

(١٢) اثرت القوتان (أ سَ + ب صَ) ، (٥ سَ - ٢ صَ) فى النقطتين جـ ، د على الترتيب حيث جـ (-٢، ١) ، د (٣، ١) فإذا كانت القوتان تكونان ازدواجاً . أوجد قيمة كل من أ ، ب ، ثم أوجد عزم الازدواج ، واوجد أيضاً البعد العمودى بين خطى عمل القوتين

الحل

∵ قَ١ ، قَ٢ تكونان إزدواج
∴ قَ١ = - قَ٢
∴ (أ ، ب) = (-٥ ، ٢)

قَ١ (-٥ ، ٢) ، قَ٢ (٥ ، -٢)
جـ (-٢ ، ١) ، د (٣ ، ١)

عزم الازدواج = عزم احدى القوتين حول نقطة على خط عمل الثانية
= عزم قَ١ حول د
جَ = دجَ × قَ١

دجَ = جـ - د = (-٥ ، ٠)
جَ = (-٥ ، ٠) × (-٥ ، ٢)
= (-٥ × ٢) - (٠ × -٥) عَ
= -١٠ عَ
مركبه - وسطيه

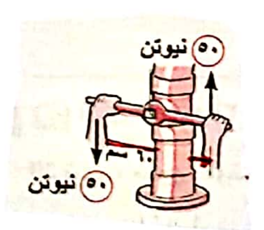
∴ ||جَ|| = ١٠

ل = $\frac{١٠}{\sqrt{٢٥+٤}}$ = $\frac{١٠\sqrt{٢٩}}{٢٩}$ وحدة طول .

(١٣) قوتان تكونان إزدواج ، مقدار أحدهما ١٥ نيوتن وعزم الازدواج الحصل منهما ٤٠ نيوتن . سم فإن البعد العمودى بينهما = ...

ل = $\frac{||جَ||}{ق}$ = $\frac{٤٥}{١٥}$ = ٣ سم

(١٤) فى الشكل المقابل عزم الازدواج الناتج من القوتين ٥٠ ، ٥٠ نيوتن = ...



٥٠ × ٦٠ = ٣٠٠٠ نيوتن . سم

(١٥) م ا ب جـ ء هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ١٠ سم . أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ٥ ، ٤ ، ٦ ، ١ ، ٣ نيوتن في $\overrightarrow{م ب}$ ، $\overrightarrow{جـ ب}$ ، $\overrightarrow{جـ ء}$ ، $\overrightarrow{هـ ء}$ ، $\overrightarrow{هـ و}$ ، $\overrightarrow{م و}$ على الترتيب أوجد مقدار واتجاه القوة التي يجب ان تؤثر في مركز المسدس حتى تؤول المجموعة إلى إزدواج ثم عين عزمه .

الحل

* $\overrightarrow{ق_1} = ٢ \overrightarrow{س}$

$\overrightarrow{ق_٢}$ (٥ نيوتن)

* $\overrightarrow{ق_٢} = -\frac{٥}{٢}\overrightarrow{س} - \frac{٥}{٢}\sqrt{٣}\,\overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ق_٣}$ (٤ نيوتن)

* $\overrightarrow{ق_٣} = -٢\overrightarrow{س} + ٢\sqrt{٣}\,\overrightarrow{ص}$

وهكذا

* $\overrightarrow{ق_٤} = ٦\overrightarrow{س}$

* $\overrightarrow{ق_٥} = \frac{١}{٢}\overrightarrow{س} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\overrightarrow{ص}$

* $\overrightarrow{ق_٦} = -\frac{٣}{٢}\overrightarrow{س} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}\overrightarrow{ص}$

∵ المجموعة تؤول إلى إزدواج

∴ $\overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ح} = \overrightarrow{0}$

∴ $\overrightarrow{ق} = -\overrightarrow{ح}$

حيث $\overrightarrow{ح} = (٢ - \frac{٥}{٢} - ٢ + ٦ - \frac{١}{٢} - \frac{٣}{٢})\overrightarrow{س}$
$+ (٠ - \frac{٥\sqrt{٣}}{٢} + ٢\sqrt{٣} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢})\overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ح} = \frac{٣}{٢}\overrightarrow{س} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\overrightarrow{ص}$

∴ $\overrightarrow{ق} = -\overrightarrow{ح} = \frac{-٣}{٢}\overrightarrow{س} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\overrightarrow{ص}$

∴ $\|\overrightarrow{ق}\| = \sqrt{\frac{٩}{٤} + \frac{٣}{٤}} = \sqrt{٣}$ نيوتن

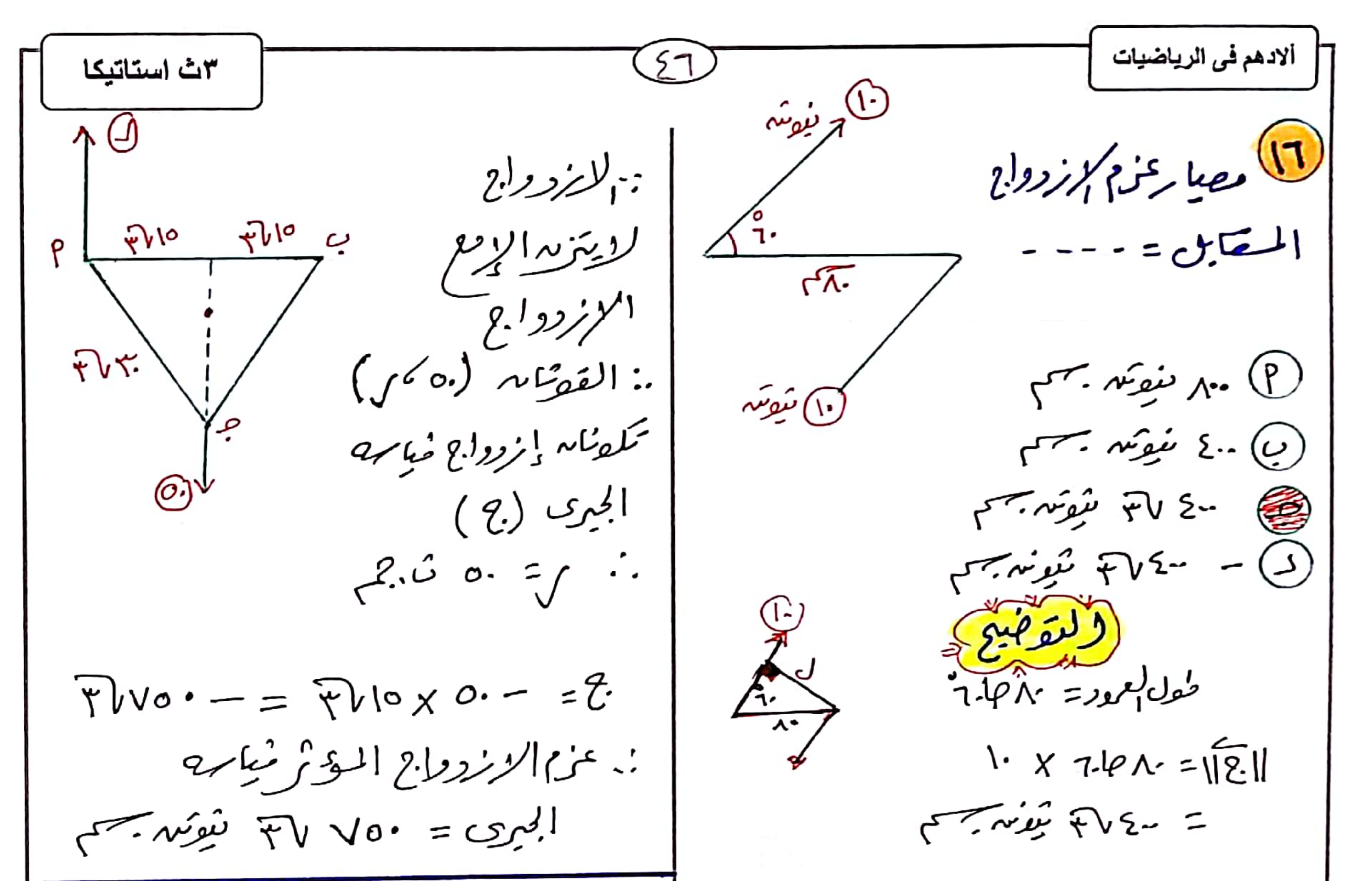
، $ظا هـ = \frac{ص}{س} = \left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right) \div \left(\frac{-٣}{٢}\right) = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

، ∵ س ، ص سالبتان

في الربع الثالث $١٨٠ + ظا^{-١}\frac{١}{\sqrt{٣}} = ٢١٠°$

، $ح_م = (٢ - ٥ + ٤ - ٦ + ١ - ٣) \times ٥\sqrt{٣}$ ← $\frac{١}{٢}ل\sqrt{٣}$

$= -٣٥\sqrt{٣}$ نيوتن.سم



١٦ معيار عزم الازدواج المقابل = ...

(أ) ٨٠٠ نيوتن.سم

(ب) ٤٠٠ نيوتن.سم

(جـ) ٤٠٠√٣ نيوتن.سم

(د) -٤٠٠√٣ نيوتن.سم

التوضيح

طول العمود = ٨٠ جا ٦٠

||ج|| = ٨٠ جا ٦٠ × ١٠

= -٤٠٠√٣ نيوتن.سم

∵ الازدواج لا يتزن إلا مع الازدواج

∴ القوتان (٥٠ ، ر) تكونان إزدواج مضاد له الجبرى (ج)

∴ ر = ٥٠ ث.جم

ج = -٥٠ × ١٥√٣ = -٧٥٠√٣

∴ عزم الازدواج المؤثر مقداره الجبرى = ٧٥٠√٣ نيوتن.سم

---

١٧ صفيحة أ ب جـ منتظمة على شكل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٣٠√٣ سم ووزنها ٥٠ ث.جم علقت الصفيحة من مسمار أفقي من ثقب بالقرب من الرأس أ فاتزنت رأسياً ، أثر على الصفيحة إزدواج عمودي على مستوى الصفيحة فاتزنت الصفيحة في وضع يكون فيه أ ب أفقياً . أوجد عزم الازدواج المؤثر ورد فعل المسمار.

الحل

فاكر الاربع الحالات التى كان فيهم المجهول إزدواج

هنحتاجهم ياريت تحفظهم

(١) أ ب جـ د هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ١٥ سم، أثرت قوى مقاديرها ٤٠، ٥٠، ٣٠، ٤٠، ٥٠، ٣٠ فى أب، ب جـ، جـ د، د هـ، و هـ، و أ على الترتيب. عين عزم الازدواج المحصل

الحل

طول الضلع = ١٥ سم
البعد بين كل ضلعين متوازيين
$ل = \sqrt{3}$ ل
$= 15\sqrt{3}$ سم

القوتان (٤٠، ٤٠) تكونان ازدواج

$ج_1 = 40 \times 15\sqrt{3} = 600\sqrt{3}$ نيوتن.سم

القوتان (٥٠، ٥٠) تكونان ازدواج

$ج_2 = -50 \times 15\sqrt{3} = 750\sqrt{3}$ نيوتن.سم

القوتان (٣٠، ٣٠) تكونان ازدواج

$ج_3 = 30 \times 15\sqrt{3} = 450\sqrt{3}$ نيوتن.سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواج القياس الجبرى لعزمه

$ج = 600\sqrt{3} - 750\sqrt{3} + 450\sqrt{3}$

$= 300\sqrt{3}$ نيوتن.سم

(٢) أ ب جـ د مستطيل فيه: أب = ٣٠ سم، ب جـ = ٤٠ سم أثرت القوى التى مقاديرها ١٥، ٣٠، ١٥، ٣٠ فى ب أ، ب جـ، د جـ، د أ على الترتيب. اثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجاً واوجد عزمه ثم أوجد قوتين تؤثران فى أ، جـ عمودياً على أ جـ بحيث تتزن المجموعة.

الحل

من فيثاغورث
أ جـ = ٥٠ سم

القوتان (٣٠، ٣٠) تكونان ازدواج

$ج_1 = -30 \times 30 = -900$ نيوتن.سم

القوتان (١٥، ١٥) تكونان ازدواج

$ج_2 = 15 \times 40 = 600$ نيوتن.سم

$\therefore ج = ج_1 + ج_2 = -900 + 600 = -300$ نيوتن.سم

لكى تتزن المجموعة فإن القوتان ق، ق تكونان ازدواج قياسه الجبرى موجب $ج_2 = -ج$ فيكون الاتجاه كما هو مبين بالرسم

$50 ق = 300$

∴ ق = ٦ نيوتن

∴ القوتان هما ٦، ٦ نيوتن

(٣) أ ب جـ د شبه منحرف متساوي الساقين فيه أ د // ب جـ ، أ د = ٩ سم ، أ ب = د جـ = ١٥ سم ، ب جـ = ٣٣ سم
أثرت القوى ٤٥ ، ٩٩ ، ٤٥ ، ٢٧ نيوتن في الاتجاهات أ ب ، ب جـ ، جـ د ، د أ على الترتيب .
أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً . وأوجد معيار عزمه .

الحل

(شكل: شبه المنحرف أ ب جـ د ، أ د = ٩ سم ، أ ب = د جـ = ١٥ سم ، ب جـ = ٣٣ سم ، الارتفاع ٩ سم ، ب و = هـ جـ = ١٢ سم ، و هـ = ٩ سم ، القوى ٤٥ ، ٩٩ ، ٤٥ ، ٢٧)

من هندسة الشكل
ب و = هـ جـ = ١٢ سم ، أ و = د هـ = ٩
∵ القوى ٤٥ ، ٩٩ ، ٤٥ ، ٢٧
في اتجاه دوري واحد

$$\frac{٤٥}{١٥} = \frac{٩٩}{٣٣} = \frac{٤٥}{١٥} = \frac{٢٧}{٩} = ٣$$

∴ المجموعة تكافئ ازدواج

القياس الجبري للعزم = − ٢ × مساحة △ × ٣

$$= -٢ \times \frac{٣٣ + ٩}{٢} \times ٩ \times ٣$$

= − ١١٣٤ نيوتن . سم

∴ معيار عزمه = ١١٣٤ نيوتن . سم

(٤) أ ب جـ د مستطيل فيه : أ ب = ٣٠ سم ، ب جـ = ٤٠ سم
أثرت قوى مقاديرها ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٥ ، ٦ ث كجم
في أ ب ، ب جـ ، جـ د ، د أ ، أ جـ .
برهن أن المجموعة تكافئ ازدواج وأوجد معيار عزمه .

الحل

(شكل: المستطيل أ ب جـ د ، أ ب = ٣٠ سم ، ب جـ = ٤٠ سم ، القوى ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٥)

أ جـ = ٥٠ سم
طول العمود الساقط من د أو ب على أ جـ

$$= \frac{٣٠ \times ٤٠}{٥٠} = ٢٤ \text{ سم}$$

نختبر العزوم حول أي ثلاث نقط

$جـ_أ = ٤٠ \times ٤ + ٣٠ \times ٢ = ٢٢٠$ ث كجم . سم ← (١)

$جـ_جـ = ٦ \times ٣٠ + ١ \times ٤٠ = ٢٢٠$ ث كجم . سم ← (٢)

$جـ_د = ١ \times ٤٠ + ٢ \times ٣٠ + ٥ \times ٢٤ = ٢٢٠$ ث كجم . سم ← (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)
∴ المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = ٢٢٠ ث كجم . سم

⑤ أثرت القوة $\vec{ق}_1 = ٦ \hat{ص}$ في نقطة الأصل و القوة $\vec{ق}_2 = -٦ \hat{ص}$ في النقطة (٢، ٠) بين أن مجموع عزوم القوى بالنسبة لأي نقطة (س، ص) لا يعتمد على س، ص.

الحل

$\vec{ق}_1 = (٠، ٦)$ ، $\vec{ق}_2 (٠، -٦)$

و = (٠، ٠) ، ا (٢، ٠)

ب (س، ص)

مجموع عزوم القوى حول ب

$\vec{ب و} \times \vec{ق}_1 + \vec{ب ا} \times \vec{ق}_2$

$(\vec{و} - \vec{ب}) \times \vec{ق}_1 + (\vec{ا} - \vec{ب}) \times \vec{ق}_2$

$(-س، -ص) \times (٠، ٦) + (٢-س، -ص) \times (٠، -٦)$

$(-٦س)\vec{ع} + (-١٢ + ٦س)\vec{ع}$

$= -١٢ \vec{ع}$

أي لا يعتمد على س، ص

⑥ أثرت القوى $\vec{ق}_1 = ٢\hat{س} - ٤\hat{ص}$ ، $\vec{ق}_2 = \hat{س} - ٣\hat{ص}$ ، $\vec{ق}_3 = -٣\hat{س} + ٧\hat{ص}$ في النقط ا(-١، ١) ب(-٢، ٣) جـ(٠، ١) على الترتيب. برهن أن المجموعة تكافئ ازدواج وأوجد معيار عزمه

الحل

$\vec{ح} = \vec{ق}_1 + \vec{ق}_2 + \vec{ق}_3 = \vec{٠}$ ← ①

$\vec{جـ}_و = \vec{و ا} \times \vec{ق}_1 + \vec{و ب} \times \vec{ق}_2 + \vec{و جـ} \times \vec{ق}_3$

$\vec{و ا} = \vec{ا} - \vec{و} = \vec{ا}$ وهكذا نحصل على طول

$\vec{جـ}_و = (-١، ١) \times (٢، -٤) + (-٢، ٣) \times (١، -٣) + (٠، ١) \times (-٣، ٧)$

$\vec{جـ}_و = (٤ - ٢)\vec{ع} + (٦ - ٣)\vec{ع} + (٠ + ٣)\vec{ع}$

$\vec{جـ}_و = ٨ \vec{ع}$ ← ②

من ①، ②

∴ المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = ٨ وحدة عزم

⑦ في الشكل المقابل مجموعة قوى مؤثرة على $\overline{اد}$ تكافئ ازدواج القياس الجبري لعزمه = -٧٥٠ نيوتن.سم أوجد قيمة ق، ك

١٠ ، ق ، ١٥ ، ك
ا ، ب ، جـ ، د
٣م ، ٤م ، ٥م

الحل

نفرض $\vec{ى}$ متجه وحدة لأعلى

∴ ح = ق + ١٠ - ك - ١٥

∵ المجموعة تؤول لازدواج ∴ $\vec{ح} = \vec{٠}$

∴ ق - ك = ٥ ← ①

∵ القياس الجبري لعزم الازدواج = -٧٥٠ نيوتن.سم

$\because$ ج$_م$ = -٧٥

$\therefore$ - ق × ٣ + ١٥ × ٧ - ١٠ × ١٢ = -٧٥

- ٣ق = -٦٠

$\therefore$ ق = ٢٠ نيوتن ومنها ل = ١٥ نيوتن

---

(٨) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٣٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، هـ ∈ $\overline{بجـ}$ ، و ∈ $\overline{أد}$ بحيث ب هـ = ٣٦ سم ، د و = ٣٦ سم . أثرت قوى مقاديرها ٥ ، ٥ ، ٧ ، ٧ ، ق ، ق ث.كجم فى اتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{جـد}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$ ، $\overrightarrow{دأ}$ ، $\overrightarrow{هـأ}$ ، $\overrightarrow{وجـ}$ فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه ١٠ ث.كجم.سم فى اتجاه جـ ب أ د أوجد ق

الحل

القوتان (٥ ، ٥) تكونان ازدواج

ج$_١$ = -٥ × ٨ = -٤٠ ث.كجم.سم

القوتان (٧ ، ٧) تكونان ازدواج

ج$_٢$ = -٧ × ٦ = -٤٢ ث.كجم.سم

القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواج

ج$_٣$ = ق × ٢ جا ٤٥ = $\sqrt{٢}$ ق

$\because$ ج$_١$ + ج$_٢$ + ج$_٣$ = ١٠

-٤٠ - ٤٢ + $\sqrt{٢}$ ق = ١٠

$\therefore$ $\sqrt{٢}$ ق = ٩٢

$\therefore$ ق = ٤٦$\sqrt{٢}$ ث.كجم

---

(٩) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ١٢ سم ، ب جـ = ٩ سم ، م ∈ $\overline{بجـ}$ بحيث ب م = ٤ سم . أثرت قوى ق$_١$ ، ٨$\sqrt{١٠}$ ، ٢٦ ، ق$_٢$ ، ١٨ نيوتن فى $\overrightarrow{بأ}$ ، $\overrightarrow{أم}$ ، $\overrightarrow{مد}$ ، $\overrightarrow{دجـ}$ ، $\overrightarrow{دأ}$ فإذا كانت المجموعة تتزن فأوجد ق$_١$ ، ق$_٢$

الحل

م د = $\sqrt{(م جـ)^٢ + (جـ د)^٢}$

$\therefore$ م د = ١٣ سم

وكذلك

أ م = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٤)^٢}$ = ٤$\sqrt{١٠}$

$\because$ القوى فى $\overrightarrow{دأ}$ ، $\overrightarrow{أم}$ ، $\overrightarrow{مد}$ فى اتجاه دورى واحد

$\therefore$ $\frac{١٨}{٩}$ = $\frac{٨\sqrt{١٠}}{٤\sqrt{١٠}}$ = $\frac{٢٦}{١٣}$ = ٢

$\therefore$ المجموعة تكافئ ازدواجاً قياسه الجبرى (ج$_١$)

حيث ج$_١$ = ٢ × ٢ م △ أ م د × إشارته

ج$_١$ = - ٢ × ٥٤ × ٢ = -٢١٦ نيوتن.سم

$\because$ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج

$\therefore$ (ق$_١$ ، ق$_٢$) تكونان ازدواج القياس الجبرى لعزمه = ٢١٦ نيوتن.سم

ق$_١$ = ق$_٢$ = ق ، $\therefore$ ق × ٩ = ٢١٦

$\therefore$ ق = ٢٤

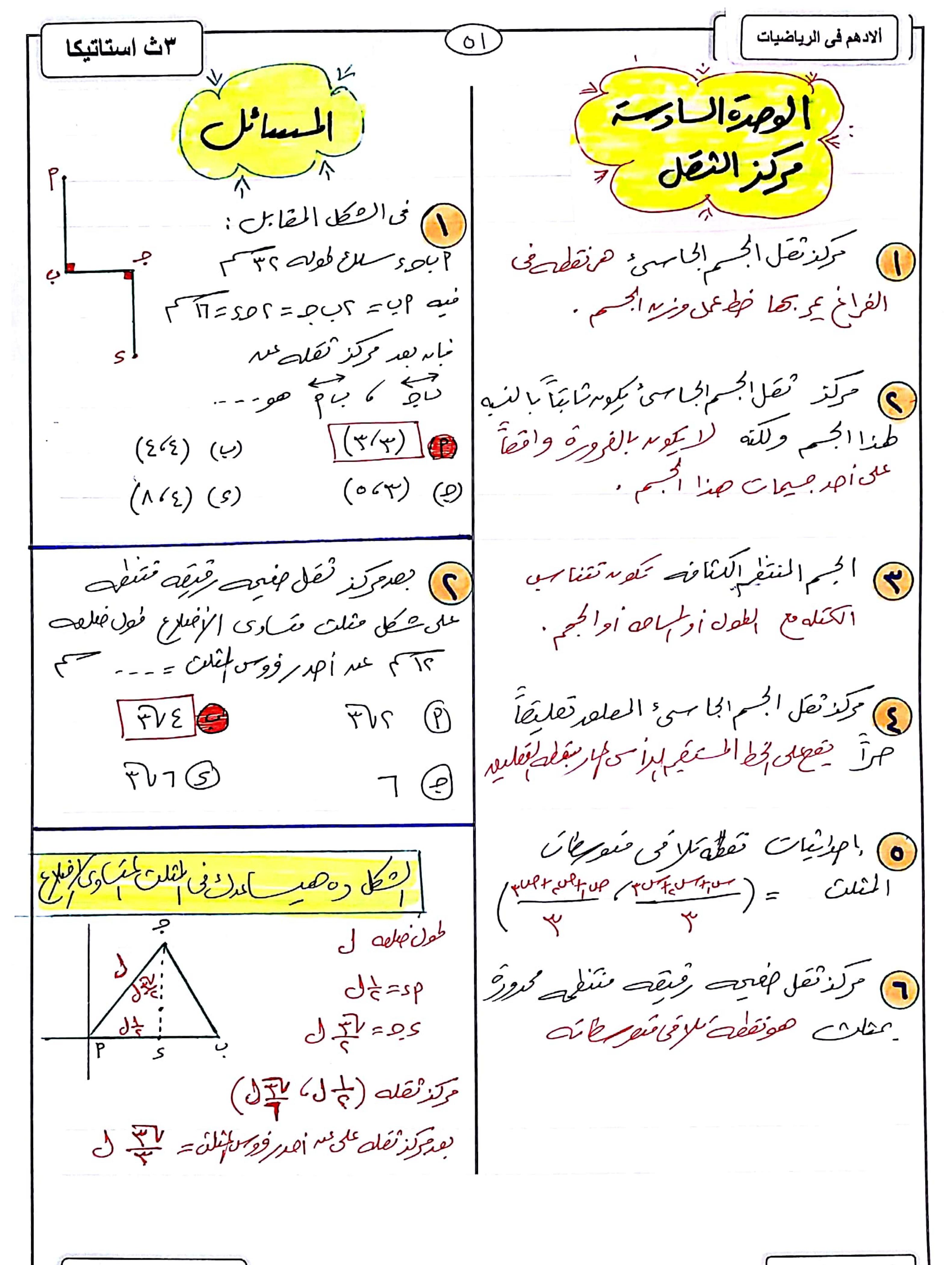
$\therefore$ ق$_١$ = ق$_٢$ = ٢٤ نيوتن

عكس عقارب

م △ أ م د = م □ - [م △ أ ب م + م △ م جـ د]

= ١٢ × ٩ - [$\frac{١}{٢}$ × ٤ × ١٢ + $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ١٢]

= ٥٤ سم^٢



الوحدة السادسة
مركز الثقل

١ مركز ثقل الجسم الجاسئ هو نقطة في الفراغ يمر بها خط عمل وزن الجسم.

٢ مركز ثقل الجسم الجاسئ يكون ثابتاً بالنسبة لهذا الجسم ولكنه لا يكون بالضرورة واقعاً على أحد جسيمات هذا الجسم.

٣ الجسم المنتظم الكثافة تكون تتناسب الكتلة مع الطول أو المساحة أو الحجم.

٤ مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقاً حراً يقع على الخط الرأسي المار بنقطة التعليق

٥ إحداثيات نقطة تلاقي متوسطات المثلث = $\left(\frac{س_1+س_2+س_3}{3} ، \frac{ص_1+ص_2+ص_3}{3}\right)$

٦ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمثلث هو نقطة تلاقي متوسطاته

المسائل

١ في الشكل المقابل: أ ب جـ د سلك طوله ٣٢ سم فيه أ ب = ٢ ب جـ = ٢ جـ د = ١٦ سم فإن بعد مركز ثقله عن $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب أ}$ هو ....

(أ) (٣، ٣) ✓ (ب) (٤، ٤)

(جـ) (٣، ٥) (د) (٤، ٨)

٢ بعد مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم عن أحد رؤوس المثلث = ... سم

(أ) $2\sqrt{3}$ (ب) $4\sqrt{3}$ ✓

(جـ) ٦ (د) $6\sqrt{3}$

الشكل ده هيساعدك في المثلث المتساوي الأضلاع

طول ضلعه ل

أ د = $\frac{1}{2}$ ل

د جـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل

مركز ثقله $\left(\frac{1}{2} ل ، \frac{\sqrt{3}}{6} ل\right)$

بعد مركز ثقله على أحد رؤوس المثلث = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ل

٣ أوجد مركز ثقل التوزيع الآتي :

$و_1 = ٢٠$ نيوتن يؤثر في (٢ ، ١)

$و_2 = ١٠$ نيوتن " " (-٣ ، ١)

$و_3 = ٢٥$ " " " (١ ، -١)

الحل

ك	٢٠	١٠	٢٥	٦٠
س	٢	-٣	١	
ص	١	١	-١	

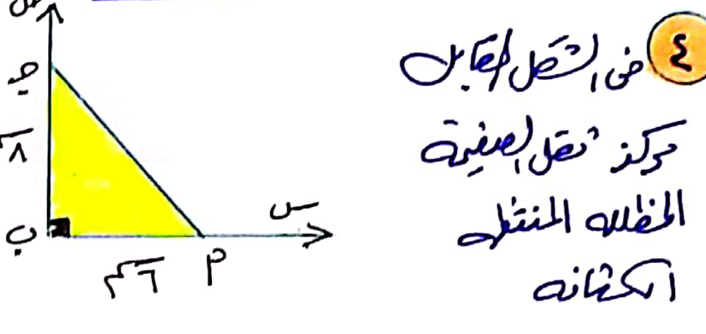
$س_م = \frac{٢٠\times٢ - ١٠\times٣ + ٢٥}{٦٠} = \frac{١}{٣}$

$ص_م = \frac{٢٠ + ١٠ - ٢٥}{٦٠} = \frac{١}{٦}$

∴ مركز الثقل هو $(\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٦})$

---

٤ في الشكل المقابل مركز ثقل الصفيحة المظللة المنتظمة الكثافة



(أ) $(٢ ، \frac{٨}{٣})$ (ب) $(\frac{٨}{٣} ، ٢)$

(جـ) $(٦ ، ٨)$ (د) $(٨ ، ٦)$

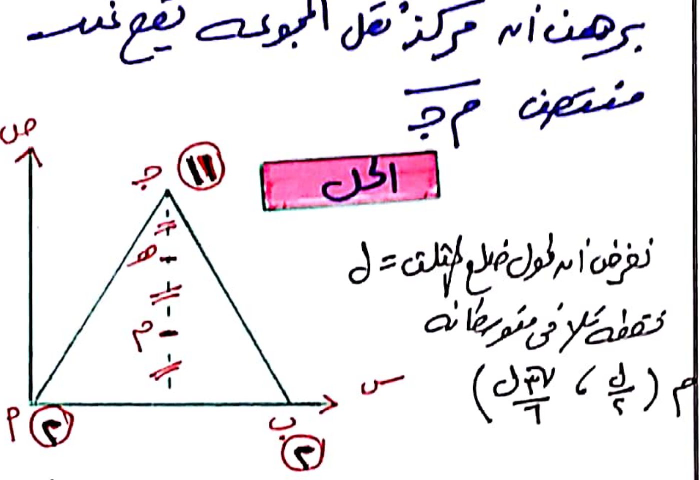
نقطة تلاقي المتوسطات $= \frac{(٠،٠) + (٦،٠) + (٠،٨)}{٣}$

$= (\frac{٦}{٣} ، \frac{٨}{٣}) = (٢ ، \frac{٨}{٣})$

---

٥ أ ب جـ صفيحة مثلثة الشكل متساوية الأضلاع ومنتظمة الكثافة كتلتها ٣ كجم ، م مركز ثقلها وضعت كتل مقاديرها ٢ ، ٢ ، ١١ كجم عند أ ، ب ، جـ على الترتيب برهن أن مركز ثقل المجموعة يقع عند منتصف $\overline{م جـ}$

الحل



نفرض أن طول ضلع المثلث = ل

نقطة تلاقي متوسطاته م $(\frac{ل}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٦}ل)$

أ (٠ ، ٠)   ب (ل ، ٠)   جـ $(\frac{ل}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}ل)$

ملحوظة هـ $= (\frac{ل}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٣}ل)$ وسط بين م ، جـ $= \frac{مجموعهما}{٢}$

ك	٣ (م)	٢ (أ)	٢ (ب)	١١ (جـ)	١٨
س	$\frac{ل}{٢}$	٠	ل	$\frac{ل}{٢}$	
ص	$\frac{\sqrt{٣}}{٦}ل$	٠	٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}ل$	

$س_م = \frac{٣\times\frac{ل}{٢} + ٢ل + ١١\times\frac{ل}{٢}}{١٨} = \frac{٩}{١٨}ل = \frac{ل}{٢}$

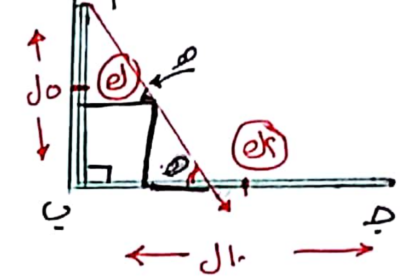
$ص_م = \frac{٣\times\frac{\sqrt{٣}}{٦}ل + ١١\times\frac{\sqrt{٣}}{٢}ل}{١٨} = \frac{٦\sqrt{٣}}{١٨}ل = \frac{\sqrt{٣}}{٣}ل$

∴ مركز الثقل يؤثر في $(\frac{ل}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٣}ل)$ وهو نفس النقطة هـ منتصف $\overline{م جـ}$ #

٦ ثُني قضيب منتظم أجـ طوله ١٥ ل من نقطة ب حيث أب = ٥ ل بحيث: ق$(\hat{\text{أبجـ}})$ = ٩٠° وعلق القضيب من الطرف أ تعليقاً حراً فأثبت أن بـجـ يميل على الأفقي بزاوية θ حيث ظا θ = $\frac{٤}{٥}$

الحل

نفرض أن هـ زاوية ميل ب جـ على الرأسي



	الكتلة	٢ك	ك	٣ك
س		٥ل	٠	
ص		٠	٢,٥ل	

$$س_م = \frac{٢ك \times ٥ل}{٣ك} = \frac{١٠}{٣} ل$$

$$ص_م = \frac{ك \times ٢,٥ل}{٣ك} = \frac{٥}{٦} ل$$

∴ مركز الثقل = $\left(\frac{١٠}{٣} ل \text{ ، } \frac{٥}{٦} ل\right)$

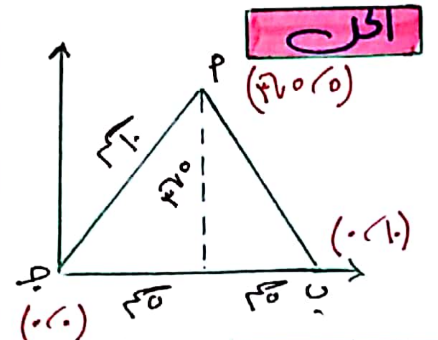
زاوية الميل على الرأسي

$$ظا هـ = \frac{٥ل - \frac{٥}{٦}ل}{\frac{١٠}{٣}ل} = \frac{٥}{٤}$$

∴ زاوية الميل على الأفقي ظا θ = $\frac{٤}{٥}$ #

٧ أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٠ سم أثقال الأوزان ٣، ٦، ٩ في أ ، ب ، جـ عين مركز ثقل المجموعة بالنسبة للنقطة جـ

الحل



	أ	ب	جـ	
الكتلة	٣	٦	٩	١٨
س	٥	١٠	٠	
ص	٥√٣	٠	٠	

$$س_م = \frac{٣ \times ٥ + ٦ \times ١٠}{١٨} = ٤\frac{١}{٦}$$

$$ص_م = \frac{٣ \times ٥\sqrt{٣}}{١٨} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٦}$$

∴ مركز الثقل = $\left(٤\frac{١}{٦} \text{ ، } \frac{٥\sqrt{٣}}{٦}\right)$ بالنسبة لنقطة جـ

(٨) إذا علقت صفيحة رقيقة منتظمة على شكل △ أ ب جـ متساوى الأضلاع بخيط من نقطة على أحد أحرفها (أجـ) بنسبة ١ : ٢ من جهة جـ فإن زاوية ميل هذا الحرف على الرأسى = ...

(أ) ٢٢,٥°   (ب) ٣٠°

(جـ) ٤٥°   (د) ٦٠°

(٩) فى الشكل المقابل: صفيحة رقيقة كتلتها ٣٠٠ جم على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم. ألصقت كتلة ١٠٠ جم فى نقطة تثليث أب كما بالرسم عين مركز ثقل المجموعة بالنسبة للمحورين $\overrightarrow{أس}$ ، $\overrightarrow{أص}$

ص، جـ، ١٢، ١٢، أ، هـ، د، ب، س، ١٠٠

الحل

ملحوظة مركز ثقل المثلث المتساوى الأضلاع $(\frac{1}{2}ل \,،\, \frac{\sqrt{3}}{6}ل) = (٦ \,،\, ٢\sqrt{3})$

هـ (٤ ، ٠) لأن $\frac{١٢}{٣} = ٤$

ك	٣٠٠	١٠٠	٤٠٠
س	٦	٤	
ص	$٢\sqrt{3}$	٠	

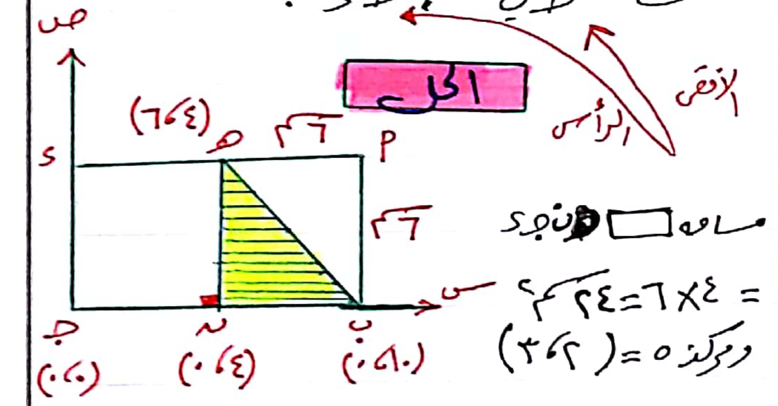
$$س_م = \frac{ك_١ س_١ + ك_٢ س_٢}{ك_١ + ك_٢} = \frac{٣٠٠ \times ٦ + ١٠٠ \times ٤}{٤٠٠}$$

$$= ٥,٥$$

$$ص_م = \frac{٣٠٠ \times ٢\sqrt{3} + ٠}{٤٠٠} = \frac{٣}{٢}\sqrt{3}$$

∴ مركز الثقل = $(٥,٥ \,،\, \frac{٣}{٢}\sqrt{3})$

(١٠) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل أ ب جـ د فيه: أب = ٦ سم، ب جـ = ١٠ سم، هـ ∈ أد بحيث أهـ = ٦ سم ثنى المثلث أ ب هـ حول الضلع ب هـ حتى انطبق أب على ب جـ تماماً. عين موضع مركز ثقل الصفيحة بعد ثنيها بالنسبة إلى $\overrightarrow{جـ ب}$ ، $\overrightarrow{جـ د}$.



مساحة ▭ هـ د جـ = ٤ × ٦ = ٢٤ سم²

ومركزه = (٢ ، ٣)

مساحة المثلثين المنطبقين فى ب هـ

$= ٢ \times \frac{1}{2} \times ٦ \times ٦ = ٣٦$ سم²

ومركزهما $(\frac{٤+١٠+٤}{٣} \,،\, \frac{٦+٠+٠}{٣}) = (٦ \,،\, ٢)$

النسبة بين المساحتين = النسبة بين الكتلتين

٣٦ : ٢٤ = ٣ك : ٢ك

↑ المثلثين   ↑ المستطيل

الشكل	المستطيل	المثلثين	
الكتلة	٢ ل	٣ ل	٥ ل
س	٢	٦	
ص	٣	٢	

$$س_م = \frac{٢ \times ٢ل + ٣ \times ٦ل}{٥ل} = \frac{٢٢}{٥} = ٤,٤ \text{ سم}$$

$$ص_م = \frac{٣ \times ٢ل + ٢ \times ٣ل}{٥ل} = \frac{١٢}{٥} = ٢,٤ \text{ سم}$$

∴ مركز الثقل (٤,٤ ، ٢,٤)

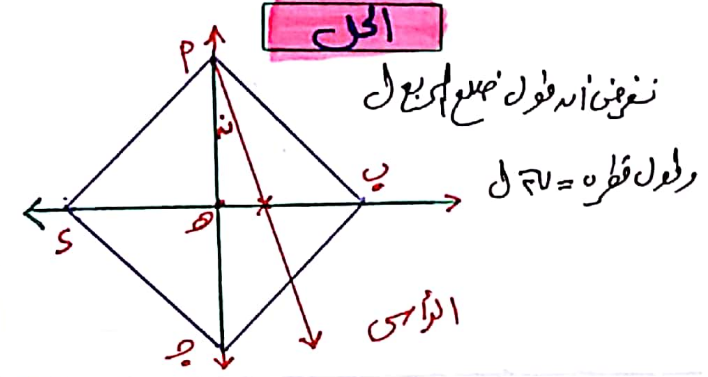
---

(١١) علقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها و تعليقاً حراً من الرأس أ وثبت عند الرأس ب ثقل وزنه $\frac{١}{٤}$ و . أثبت أن زاوية ميل القطر $\overline{أج}$ على الرأسي في وضع الاتزان = [illegible]

الحل

نفرض أن طول ضلع المربع ل

وطول قطره = $\sqrt{٢}$ ل



هـ نقطة الأصل (٠،٠) وفيها مركز ثقل المربع

هـ ب = نصف القطر = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ل

	المربع	الجسم	
الكتلة	و	$\frac{١}{٤}$ و	$\frac{٥}{٤}$ و
س	٠	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ل	
ص	٠	٠	

$$س_م = \frac{٠ + \frac{١}{٤} و \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} ل}{\frac{٥}{٤} و} = \frac{\sqrt{٢}}{١٠} ل$$

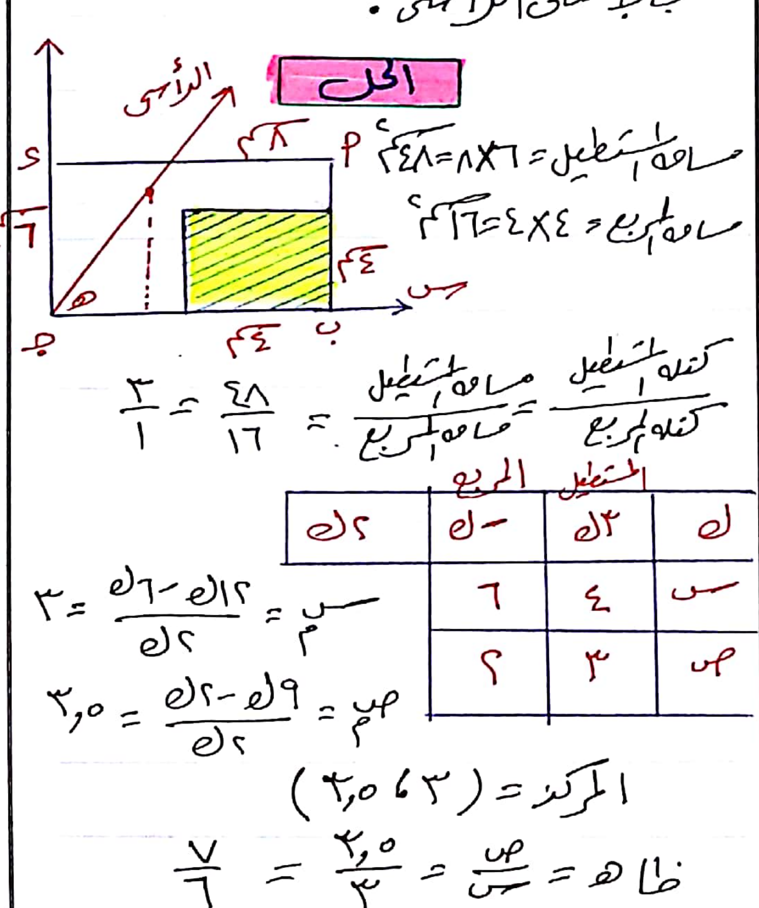
$$ص_م = ٠$$

$$\therefore ظا هـ = \frac{\sqrt{٢}}{١٠} ل \div \frac{\sqrt{٢}}{٢} ل = \frac{١}{٥} \ \#$$

---

(١٢) صفيحة رقيقة على شكل مستطيل أ ب ج د الذي فيه أ ب = ٦ سم ، ب ج = ٨ سم ، قطعت منها قطعة مربعة الشكل من الرأس ب طول ضلعها ٤ سم . أوجد بعد مركز ثقل الجزء الباقي عن كل من $\overline{دج}$ ، $\overline{جب}$ ثم إذا علق الجزء الباقي تعليقاً حراً من الرأس ج ، فأوجد في وضع التوازن ظل زاوية ميل $\overline{بج}$ على الرأسي .

الحل



مساحة المستطيل = ٦ × ٨ = ٤٨ سم²

مساحة المربع = ٤ × ٤ = ١٦ سم²

$$\frac{\text{كتلة المستطيل}}{\text{كتلة المربع}} = \frac{\text{مساحة المستطيل}}{\text{مساحة المربع}} = \frac{٤٨}{١٦} = \frac{٣}{١}$$

	المستطيل	المربع	
ل	٣ل	-ل	٢ل
س	٤	٦	
ص	٣	٢	

$$س_م = \frac{١٢ل - ٦ل}{٢ل} = ٣$$

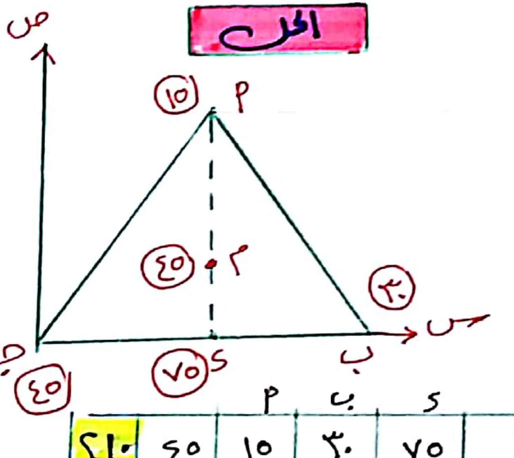
$$ص_م = \frac{٩ل - ٢ل}{٢ل} = ٣,٥$$

المركز = (٣ ، ٣,٥)

$$ظا هـ = \frac{ص}{س} = \frac{٣,٥}{٣} = \frac{٧}{٦}$$

١٣ ا ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٣٠ سم ، م نقطة تقاطع متوسطاته ، د منتصف $\overline{ب جـ}$ ثبت الكتل ١٥ ، ٣٠ ، ٧٥ ، ٤٥ ، ٤٥ عند ا ، ب ، د ، جـ ، م
عين مركز ثقل المجموعة . وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند ب فأين يقع مركز ثقل المجموعة المتبقية .

الحل



	جـ	د	ب	ا	م	
الكتل	٤٥	٧٥	٣٠	١٥	٤٥	٢١٠
س	٠	١٠	٢٠	١٠	١٠	
ص	٠	٠	٠	$١٠\sqrt{٣}$	$\frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$	

$$س_م = \frac{٧٥ \times ١٠ + ٣٠ \times ٢٠ + ١٥ \times ١٠ + ٤٥ \times ١٠}{٢١٠}$$

$$س_م = \frac{٦٥}{٧}$$

$$ص_م = \frac{١٥ \times ١٠\sqrt{٣} + ٤٥ \times \frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}}{٢١٠} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٧}$$

∴ مركز الثقل = $\left(\frac{٦٥}{٧} ، \frac{١٠\sqrt{٣}}{٧}\right)$ من نقطة "جـ"

بعد رفع الكتلة عند ب

ك	٢١٠	−٣٠	١٨٠
س	$\frac{٦٥}{٧}$	٢٠	
ص	$\frac{١٠\sqrt{٣}}{٧}$	٠	

$$س_ن = \frac{٢١٠ \times \frac{٦٥}{٧} - ٣٠ \times ٢٠}{١٨٠} = \frac{١٥}{٢}$$

$$ص_ن = \frac{٢١٠ \times \frac{١٠\sqrt{٣}}{٧}}{١٨٠} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$$

∴ مركز الثقل الجديد = $\left(\frac{١٥}{٢} ، \frac{٥\sqrt{٣}}{٣}\right)$
من نقطة "جـ"

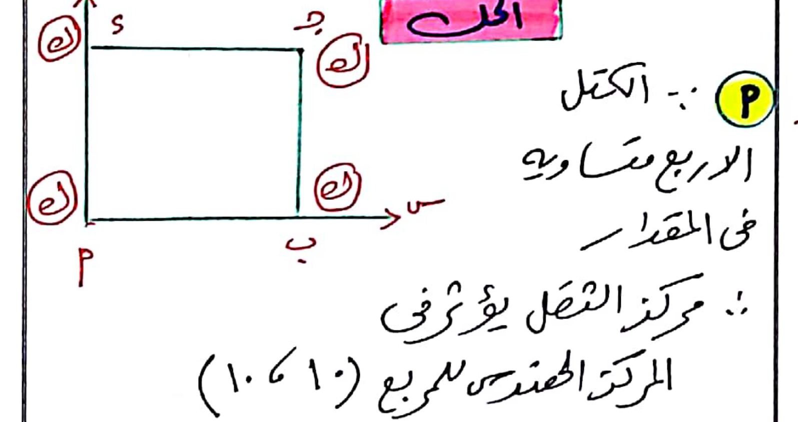
---

١٤ ا ب جـ د مربع طول ضلعه ٢٠ سم وضعت أربع كتل متساوية في المقدار عند رؤوسه.

(ا) عين مركز ثقل المجموعة .

(ب) إذا رفعت الكتلة الموجودة عند أحد رؤوسه فأين يقع مركز ثقل المجموعة المتبقية

الحل

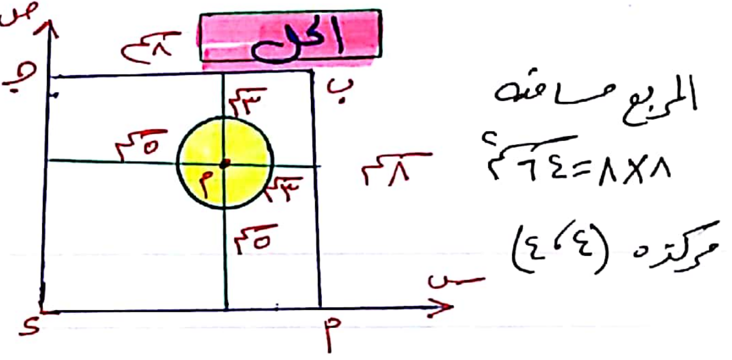


(ا) ∵ الكتل الاربع متساوية في المقدار
∴ مركز الثقل يؤثر في المركز الهندسي للمربع (١٠ ، ١٠)

(ب) عند رفع أحد الكتل ولتكن جـ مثلاً
∴ مركز ثقل الجزء الباقي يقع عند نقطة تلاقي متوسطات △ ا ب د
وهو $\left(\frac{٢٠}{٣} ، \frac{٢٠}{٣}\right)$

(١٥) صفيحة منتظمة على شكل مربع أ ب جـ ء طول ضلعه ٨ سم ، فصل منها قرص دائري طول نصف قطره ٢ سم ويبعد مركزه ٣ سم عن أ ب ، ب جـ . عين بعد مركز ثقل الجزء الباقي عن ء جـ ، أ ء $(\pi = \frac{22}{7})$

الحل



المربع مساحته $8 \times 8 = 64$ سم²

مركزه $(4 ، 4)$

القرص الدائري مساحته $= \pi$ نق² $= \frac{22}{7} \times 4 = \frac{88}{7}$

مركزه $= (5 ، 5)$

كتلة المربع : القرص

$64 : \frac{88}{7} = 56 : 11$

ك	٥٦ك (المربع)	-١١ك (الدائرة)	٤٥ك
س	٤	٥	
ص	٤	٥	

$\bar{س} = \frac{56ك \times 4 - 11ك \times 5}{45ك} = \frac{169}{45}$

$\bar{ص} = \frac{56ك \times 4 - 11ك \times 5}{45ك} = \frac{169}{45}$

∴ مركز الثقل الجديد $(\frac{169}{45} ، \frac{169}{45})$

(١٦) صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل ∆ أ ب جـ متساوي الساقين حيث أ ب = أ جـ = ٢٦ سم ، ب جـ = ٢٠ سم .

رسم أ ء ⊥ ب جـ ويقطع ب جـ في ء ، فإذا كانت هـ منتصف أ ء وفصل ∆ هـ ب جـ أوجد بعد مركز ثقل الجزء الباقي عن هـ

الحل

أ ء = ٢٤ سم فيثاغورث

مساحة ∆ ب هـ جـ : ∆ أ ب جـ

$= \frac{1}{2} \times 20 \times 12 : \frac{1}{2} \times 20 \times 24$

$= 1 : 2$

لاحظ أن ء نقطة الأصل

مركز ثقل ∆ أ ب جـ $= (0 ، \frac{24}{3}) = (0 ، 8)$

مركز ثقل ∆ هـ ب جـ $= (0 ، \frac{12}{3}) = (0 ، 4)$

الكتلة	٢ك	-ك	ك
س	٠	٠	
ص	٨	٤	

$\bar{س} = 0$

$\bar{ص} = \frac{16ك - 4ك}{ك} = 12$

∴ مركز الثقل $(0 ، 12)$

وهو نفسه نقطة هـ $(0 ، 12)$

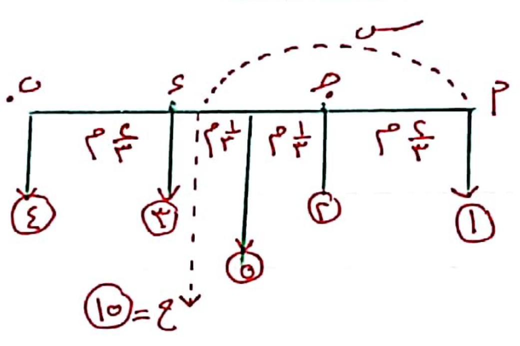
∴ بعد مركز الثقل عن هـ = صفر

هانت يا أبطال

(١٧) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢ م ووزنه ٥ نيوتن ، جـ ، ء نقطتا تثليثه من جهة أ علق أوزانه مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ : أ ، جـ ، ء ، ب

عين مركز ثقل المجموعة .

الحل



نفرض أن مركز ثقل المجموعة يبعد مسافة س مترا عن أ

، عزم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ

$\therefore ٢ \times \frac{٢}{٣} + ٥ \times ١ + ٣ \times \frac{٤}{٣} + ٤ \times ٢ = ١٥ \times س$

$\frac{٥٥}{٣} = ١٥ س$

$\therefore س = \frac{٥٥}{٣} \div ١٥ = \frac{١١}{٩}$ م

$\therefore$ مركز الثقل يبعد مسافة $\frac{١١}{٩}$ متر عن أ

(١٨) مركز ثقل جسمين ماديين كتلة كل منهما ٣ كجم ، ٦ كجم والمسافة بينهما ١٥ سم يبعد عن الجسم ٣ كجم مسافة .... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٧,٥ (د) ٩

(٣) ——— ١٥ سم ——— (٦)

(٠،٠) (١٥،٠)

$س_م = \frac{٦ \times ١٥ + ٣ \times ٠}{٦ + ٣} = ١٠$

$ص_م = ٠$ (١٠ ، ٠)

يبعد ١٠ سم عن الكتلة ٣ كجم

تم بحمد الله وتوفيقه الانتهاء من مادة الاستاتيكا

اللهم اجعله خالصا لوجهك الكريم

اللهم علمنا ما ينفعنا وانفعنا بما علمتنا

أ/ محمد أدهم
معلم رياضيات